

DYIVEDI GANITA KA ITIHASA

म० म० पं० सुधाकर द्विवेदी रचित

गणित का इतिहास

मूल्य १५-००

गणित का इतिहास ।

पहला भाग,

पाटीगणित ।

बनारससंस्कृतकालेज के प्रधानाध्यापक
महामहोपाध्याय सुधाकरद्विवेदी ने बनाया ।

A HISTORY OF MATHEMATICS.

FIRST PART
ARITHMETIC.

BY

Mahamahopādhyāya Sudhākara Dvivedi,

1st Professor, Government Sanskrit College, Benares

AND

Fellow of Allahabad University.

बनारस

वाभाकरी प्रिण्टिङ्ग वर्क्स में

बाबूरामनारायणद्वारा मुद्रित ।

सन् १९१० ईस्वी.

All rights reserved.

Price Rs. 2.]

[मूल्य २)

Registered Under Sections 18 and 19 of Act XXV of 1867.

A HISTORY OF MATHEMATICS.

BY

Mahāmahopādhyāya Sudhākara Dvivedi.

विषयानुक्रम ।

	पृष्ठ		पृष्ठ
अंक	१-११	दश या दहाई	५२-५३
व्याबिलोनिआ का अंक	११-१४	शत या सैकड़ा	५३
एजिप्ट का अंक	१४-१७	सहस्र या हजार	५३
ग्रीस का अंक	१७-२१	अयुत, लक्ष (नियुत) और	
साबिअन लोगो के अंक	२१-२२	प्रयुत	५३-५४
रोमन के अंक	२२	कोटि या करोड़	५४-५५
चीन के अंक	२२-२३	अबुद्	५५
तिब्बत में अंकों के शब्द	२३-२४	अब्ज (पद्म, कमल), खर्व (छोटा	
बसुके के एक, दो	२४	कमल) निखर्व (कुछ बड़ा	
हिब्रू के अंक	२५	कमल) और महापद्म	५५-५६
अरबी का संकेत	२५	शंकु	५६-५७
रशियन का संकेत	२५-२६	जलधि (समुद्र), अन्त्य,	
अशोक के समय का अंक	२६-२७	मध्य और परार्ध	५७-५८
संस्कृत में अंकों के शब्द		अर्व (अरब)	५८
और चिह्न	२७-३५	शंख और नील	५८
बोलने की चाल से लिखने		अंकों का जोड़ना और	
की चाल उलटी	३५-४०	घटाना	५९-६३
शून्य	४०	साठगुने स्थानांक-संख्याओं	
अक्षर बनने का स्थान	४०-४१	का जोड़ना और घटाना	६३-६४
लिखने का स्थान	४१-४२	पुराने समय का जोड़ना और	
अरब के अंक	४२-४५	घटाना	६४-६७
क्यांटर और ह्यांकल का मत	४५-४६	अंकों का गुणन और	
संस्कृत में स्थानों के नाम	४६-५२	भागद्वार	६७-७८

पृष्ठ	पृष्ठ
गुणनफल और लब्धि को	इष्टकर्म १२६-१२८
जौचना ७८-८२	एक-दो... भेद १२९-१३०
वर्ग और घन ८२-८४	नई कल्पना १३०-१३१
वर्गमूल और घनमूल ८४-८७	नई संख्या १३१-१३२
भिन्न-अंक ८७-८८	लघुरिक्त (Logarithms) १३२-१३९
ग्रीक का भिन्न ८८-९०	गिनती में वैज्ञानिकों का विशेष विचार १३९-१४७
विततभिन्न (Continued Fractions) ९०	पूरे अंकों का परिकर्म १४७-१४९
एजिप्ट का भिन्न ९१-९४	भिन्न-संख्या १४९-१५०
दशमलव ९४-९७	वैदिक परिभाषा और गणित १५०-१५४
चिह्न ९७-१०३	संख्याओं के संस्कृत शब्द १५४-१५६
दृढसंख्या १०३-११४	ग्रंथ में जिन प्रसिद्ध पंडितों के नाम आए हैं उन का संक्षेप से जीवनचरित्र १५७-१९०
चिति ११५-११८	शब्दानुक्रमणिका १९१-२०७
यंत्र (Magic Squares) ११८-१२३	
विलोमगणित १२३-१२५	
स्वांशानुबंध और स्वां-शापवाद १२५-१२६	

भूमिका ।

भारत में नरनारिमुँह बात बात में राम ।
जो राजत घर घर सदा ताहि करउँ परनाम ॥

बनारस गवर्नमेंट संस्कृत कालेज के ज्योतिषाचार्य परीक्षा देने-वाले विद्यार्थियों के लिये मैं हर साल गणित के इतिहास पर कुछ न कुछ व्याख्यान देता हूँ ।

पिछले साल व्याख्यान देते समय यह इच्छा हुई कि जौ यह व्याख्यान हिंदी-भाषा में लिख कर छपवा दिया जाय तो अपने देशभाइओं का कुछ न कुछ जरूर उपकार हो । इस लिये आज इस का पहला भाग, 'पाटीगणित' छपवा कर विद्वानों के सामने खड़ा कर दिया है ।

यहाँ पर कोई ऐसी सोसाइटी नहीं जिस से पंडितों के ग्रंथ सहज में छापे जायें । इस लिये मुझे संकेत चिह्नों के बनवाने में बहुत कष्ट उठाने पड़े तौभी मेरे मन लायक संकेतचिह्न न बने ।

इस में मुझे जो जो बातें गुरुपरंपरा से मालूम थीं उन्हें और जो कुछ पुराने संस्कृतग्रंथों से और प्रामाणिक युरोपियन ग्रंथों से सच जान पड़ी उन सब को लिखा है । यूरप के पंडितों के नाम मुझे अँगरेजी अक्षरों में मिले जिन के ठीक ठीक उच्चारण किसी युरोपियन के मुँह से सुनने का मुझे मोका न मिला इस लिये विशेष संभव है कि हिंदी में उन के शुद्ध नाम के लिखने में भूल हो गई हो । इसी लिये हिंदी नाम के आगे अँगरेजी नाम भी अँगरेजी अक्षरों में लिख दिए गए हैं जिन से पढ़नेवाले शुद्ध नाम समझ लें । इस में जिन जिन पंडितों के नाम आए हैं, संक्षेप से यथा

संभव, उनके जीवनचरित्र भी अंत में लिख दिए गए हैं और अकारादिक्रम से ग्रंथ के विशेष शब्द भी अनुक्रमणिका में दे दिए गए हैं जिस में पंडितों को किसी शब्द के ढूँढने में कष्ट न हो ।

अंत में पंडितों से विनती है कि इस में जहाँ कुछ जो भूल हो गई हो उसे ठीक करें और इस विषय पर इस से भी अच्छी पोथी लिखने के लिये कसर कसें । मैंने तो इस देश में एक नींव डाल दी है, आप लोग चाहे इस पर महल उठावें या इस नींव को खोद कर बहा दें ।

मेरी इच्छा है कि आगे इस का दूसरा भाग (बीजगणित) लिखूँ ।

पहला भाग पाटीगणित, दूसरा भाग बीजगणित, तीसरा भाग रेखागणित और क्षेत्रव्यवहार और चौथा भाग त्रिकोणमिति और ज्यौतिषसिद्धान्त, ये चार भाग इस गणित के इतिहास में रहेंगे ।

“जो ढूँढा सो पाइयाँ गहिरे पानी पैठि ।

वे बपुरी क्या पाइयाँ रहीँ किनारे बैठि ॥”

(कबीरदास)

२९-१०-१९१०

}

सुधाकरद्विवेदी ।



श्रीजानकीवल्लभो विजयते ।

गणित का इतिहास ।

पहला भाग,

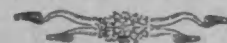
पाटीगणित ।

जयति जगति चित्रं यच्चरित्रं पवित्रं

सुरमनुजसुगीतं सज्जनानन्दनीतम् ।

तमिह हृदि नितान्तं सत्यसीतासुकान्तं

लिखति गणितवृत्तं स्थापयित्वा सुवत्सम् ॥



अंक ।

इस संसार में व्यवहार के लिये जिस समय शब्द बनाए गए, उसके पहले जो ध्यान देकर विचार करो तो एक, दो, तीन, ... के समझने के लिये पहले पहल इन्हीं अंकों के शब्द बने होंगे । गर्भ में बच्चे के आते ही एक, दो, ... महीनों की गिनती होने लगती है । बहुत लोग कहते हैं कि पहले नाद और बिंदु फिर पीछे चारो वेद बने । जो कुछ हो पर नाद के साथ सात सुरों के बोलते ही सात का अंक और वेद के साथ चारो वेद कहने में चार का अंक आता है । वेदत्रयी कहते ही तीन आ गया ।

१ पाटीगणित को व्यक्तगणित और कहीं कहीं अंकगणित भी कहते हैं ।

महादेव की ढक्का से व्याकरण के चौदह सूत्र निकलते ही संस्कृत में 'चतुर्दश' बना। पाणिनि के व्याकरण के नामकरण में 'अष्टाध्यायी' कहते ही आठ का शब्द बनाया गया; एकवचन और द्विवचन में एक और दो आए। निरुक्त वैदिक-कोश ही है, उस में "इमानि पृथिवीनामधेयान्येकविंशतिः", "हिरण्यनामान्युत्तराणि पञ्चदश", "कान्तिकर्माण उत्तरे धातवोऽष्टादश", "गति-कर्मणे उत्तरे धातवो द्वाविंशं शतम्", में अंक ही भरे हैं। शिक्षा में "त्रिषष्टिर्वा चतुःषष्टिर्वर्णाः शम्भुमते मताः" इस में तिरसठ और चौसठ आए। सब से प्रधान गायत्रीछंद के लक्षण में "इह हि षडक्षरो गायत्रीचरणः" इस में छ आया। कल्प में वेदियों की रचना में जहाँ देखो तहाँ अंक ही प्रधान हैं।

सांख्य में 'पञ्च भूतानि' 'दशेन्द्रियाणि' कहते ही पाँच और दश आए। योग में 'षट् चक्राणि' 'अष्ट कमलानि' 'दश रन्ध्राणि' बोलते ही छ, आठ और दश आ जाते हैं। पूर्वमीमांसा में कर्म प्रधान होने से सब जगह अंक ही अंक हैं। वेदांत (उत्तरमीमांसा) में अद्वितीय कहते ही एक और दो मुख्य हो जाते हैं। न्याय और वैशेषिक में चौबीस गुण, द्व्यणुक, त्र्यणुक, ... कहने में चौबीस, दो, तीन, ... आते हैं।

अठारह पुराण कहते ही अठारह आता है।

स्मृति याने धर्मशास्त्र में त्रिरात्र, पक्षिणी, दशाह, युग, ... के वर्णन में जहाँ देखो तहाँ अंक ही अंक देख पड़ते हैं।

वाल्मीकिरामायण में विश्वामित्र से दशरथ का कहना "इयं त्वक्षौहिणी पूर्णा बलस्य मम दुर्जया", चौदह वर्ष राम के वनवास में, दशरथ के मरने पर द्वादशाह अशौच और किष्किंघाकांड में वानरो की गिनती में सब अंक ही हैं। काव्य और नाटको में सर्ग और अंको की गिनती में अंक ही अंक हैं।

महाभारत में पाँचो पांडव, अक्षौहिणी, बारह वर्ष

तक वनवास, विष्णुसहस्रनाम, ... में सब अंक ही भरे हैं।

वैद्यशास्त्र में रस बनाने में जहाँ देखो तहाँ अंक हैं। शस्त्रविद्या में लोहे पर पानी चढ़ाने, आँच में तपाने, ... में अंक ही हैं।

ऊपर लिखी हुई बातों से निश्चय है कि संसार में गिनती के बिना कोई व्यवहार नहीं हो सकता। जिस चारपाई पर सोते हो और जिस घर में रहते हो वे भी अंक के बिना नहीं बन सकते।

जिन अंको से संसार के सब व्यवहार बँधे हैं, वे अंक कैसे बने इस के जानने की लालसा, मैं समझता हूँ, छोटे बड़े सभी को होती होगी।

सब से पहले यह प्रश्न उठता है कि गिनती करने में नव अंक और एक शून्य ये दश ही चिह्न क्यों बनाए गए।

इस के उत्तर में यह बात मन में आती है—

आदमी मकदूर भर दूसरे की मदद नहीं चाहता। अपने से जो काम सहज में हो सकता है उस के लिये दूसरे की क्या जरूरत। इस लिये लोग पहले पहल गिनने के लिये अपने दोनो हाथों की अँगुलियों को काम में लाए और दशों के गिन जाने पर एक दहाई कहाई। फिर पीछे से दूसरों को समझाने के लिये इन्हीं नव अँगुलियों के स्थान में एक, दो, ... के निशान बनाए गए; उन्हीं को संस्कृत में अंक कहते हैं। यह अंक शब्द 'अकि' धातु से, जिस का अर्थ चिह्न करना है, बना है।

जानते हो कि 'मुण्डे मुण्डे मतिर्भिन्ना' याने हर एक आदमी की बुद्धि जुदी जुदी है इस लिये सब जगह नव अंक बनाने की रीति

१ इसी लिये ज्यौतिषवेदाङ्ग में लिखा है—

यथा शिखा मयूराणां नागानां मणयो यथा ।

तद्वदेदाङ्गशास्त्राणां गणितं मूर्धनि स्थितम् ॥

न पैदा हुई। किसी जगह एक ही हाथ की अँगुलियों से गिनने पर पाँच ही अंक बने। कहीं कहीं नव अंकों को और दहाई जान लेने पर अपने अपने सुभीते के लिये, ११ गुने, १२ गुने, ६० गुने, ... अंक बनाए गए।

अरिस्टोटल (Aristotle = अरस्तू) ने भी जो ईशा मसीह के ३४० वर्ष पहले हुए हैं अपनी प्राब्लेमाटा (Proble-mata) नाम की पोथी में यही प्रश्न उठाया है कि सब आदमी के बीच में दश ही तक क्यों गिनती के चिह्न हैं। इस के उत्तर में अरस्तू ने भी यही लिखा है कि सब लोगों ने अपने हाथ की अँगुलियों को गिनती करने में लिए इस लिये दश ही चिह्न बने पर कहीं कहीं लड़कों के ऐसा याद न रहने की वजह से गिनने के अंक कुछ कम बनाए गए हैं— जैसे थ्रेसियन्स (Threcians) जाति में चार ही तक अंक हैं। इस से साफ है कि अरस्तू के भी बहुत पहले से दहाई प्रचलित है।

अपने अपने देश में बुद्धिमानों ने इन अंकों के जुदे जुदे निशान बनाए। अशोक राजा के समय के तामे या पत्थर पर के जो लेख पाए गए हैं उन में एक . . . : . . . इतने तरह के पाए जाते हैं।

इस तरह से अक्षर लिखने की विद्या के पहले जुदे जुदे देशों में जुदे जुदे अंकों के चिह्न बने। पीछे से शब्दों के लिखने के लिये जब अक्षर बनाए गए तब कहीं कहीं तो पुराने संकेत रह गए और और जगह अंकों को उन के शब्दों के पहले अक्षर की सूरत से जाहिर करने लगे, फिर जल्दी जल्दी लिखने में पहले अक्षर की सूरत बिगड़ते बिगड़ते आज कल के १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९ हो गए।


ऊपर की बात को सिद्ध करने के पहले कुछ अपने और कुछ दूसरे देशों के अंक-चिह्न दिखलाते हैं।


पौराणिकों का मत है कि पुराणों में पूजने के लिये जो नवग्रहों की सूरते लिखी हैं उन्हीं की बिगड़ी सूरत १, २, ... हैं।


होम वगैरह में कर्मकांडी ग्रहों की जो सूरते बनाते हैं उन की बिगड़ी सूरत १, २, ... हैं यह बात असंभव जान पड़ती है। सूर्य की गोल परिधि ऐसी सूरत है। परिधि छोटी बड़ी हो सकती है पर वह बिगड़ कर लंबी १ ऐसी हो जाय यह असंभव है।


दुर्गाशङ्कर पाठक (गणकतरङ्गिणी देखो) जी का मत है कि कुवेर की नवनिधिओं की बिगड़ी सूरत १, २, ... हैं।


कुवेर की नवनिधिओं के नाम— कुंद, मुकुंद, नील, कच्छप (कलुआ), मकर (मगर), खर्व (छोटा कमल), पद्म (कुछ बड़ा कमल), महापद्म (सब से बड़ा कमल), और शंख हैं।


कुंद (एक माघी फूल की कली) की सूरत  = १।


मुकुंद (फूल जिसकी डंटी में दो कली होती हैं उस) की सूरत  = २।


नील (फूल जिसकी डंटी में तीन कली होती हैं उस) की सूरत ...  = ३।

कच्छप (कलुए) की सूरत ...  = ४।

मकर (मगर) की सूरत ...  = ५।

खर्व (छोटे कमल) की सूरत ...  = ६।

पद्म (कुछ बड़े कमल) की सूरत ...  = ७।

महापत्र (सब से बड़े कमल) की सूरत ...  = ८ ।

और शंख की सूरत ...  = ९ ।

जो सोच कर देखो तो सारे संसार में खड़ी और तिरछी रेखा ही के सब प्रपंच हैं । छोटे बच्चे को जो कलम पकड़ा दो तो वह जमीन या कागज पर खड़ी या तिरछी रेखा ही खींचने लगता है; कभी कलम को चारो ओर घुमा भी देता है जिस से एक गोल टेढ़ी मुंदरी ऐसी परिधि भी बन जाती है । इन्हीं रेखाओं ही से संसार में सब सूरतें बनी हैं ।

रेखा के 'र' को 'ल' से बदल देने से, जैसा कि र, ड, ल, का अदल बदल संस्कृत और हिंदी में हुआ करता है, 'रेखा' का दूसरा नाम 'लेखा' है । 'लेखा' हिसाब के अर्थ में बौद्ध के पहले से हिंदुस्तान में प्रचलित है ।

प्राकृत के जातकों में जिन पर बुद्धघोष की टीका है, बहुतों के जीवनचरित में पढ़ने के समय लेखा, रूप और गणना ये सब नाम आए हैं । रूप से अब तक संस्कृत के गणित में प्रचलित सिक्के लिए जाते हैं । भास्कराचार्य ने अपने बीज में सब जगह 'रूप' प्रसिद्ध सिक्के के अर्थ में लिखा है । आज कल भी सब जगह लोग कहा करते हैं कि इस का लेखा (हिसाब) लगाओ ।


जयरामज्यौतिषीजी का मत है—


पाणिनि के व्याकरण से 'लिख' (अक्षरविन्यासे) धातु से पहले लेखा (लिख्यते या=जो लिखा जाता है) फिर 'ल' की जगह 'र' कर देने से 'रेखा' बना है । यही बात भानुदीक्षित ने अपनी अमरकोश की टीका में लिखी है । रेखा ही से अक्षरों के चिह्न बनाए गए हैं । वेद के मन्त्रों में उदात्त,


अनुदात्त और स्वरित स्वरों के जानने के लिये सब से पहले खड़ी और तिरछी रेखा ही बनाई गई ।


इन सब बातों से कह सकते हैं—


१ = | , — ऐसा हो सकता है । इसी तरह—


२ =  , एक तिरछी और एक खड़ी रेखा मिलाने से ।


३ =  , एक खड़ी एक तिरछी फिर एक खड़ी रेखा मिलाने से ।


४ =  , इस में छोटी बड़ी दो तिरछी और दो खड़ी रेखा हैं ।

५ =  , इस में दो तिरछी, दो खड़ी और एक तनिक दहिनी ओर झुँकती रेखा है ।

६ =  , इस में तीन तिरछी और तीन खड़ी रेखा हैं ।

७ =  , इस में छोटी बड़ी चार तिरछी और तीन खड़ी रेखा हैं ।

८ =  , इस में छोटी बड़ी चार तिरछी और चार खड़ी रेखा हैं ।

९ =  , इस में छोटी बड़ी पाँच तिरछी और चार खड़ी रेखा हैं ।

एकम्, द्वे, त्रीणि, चत्वारि, पञ्च, षट्, सप्त, अष्ट और नव ये पाणिनि और शाकटायन के उणादि से बनते हैं इसलिये एक प्रकार के स्वयं सिद्ध ही हैं ।

एक—'इण' (गतौ) धातु से कन् प्रत्यय करने से बना है । (एति गच्छति सर्वासु संख्यासु) जो सभी संख्याओं में रहे ।

द्वि— पाणिनि के अनुसार—

‘दु’ (गतौ) धातु से इ प्रत्यय करने से बना है (‘अच इः’) जिसका चलनेवाला अर्थ है ।

हेमचन्द्र के अनुसार—

‘उभे’ (पूरणे) धातु से इ और त्र प्रत्यय करने से द्वि, त्रि बनते हैं (उभेर्द्वौ च) जिसका पूरण करनेवाला अर्थ है ।

गुजरात के प्रसिद्ध ‘शब्दचिन्तामणि’ कोश में—

‘दृ’ (विदारणे आदरे च) धातु से द्वि प्रत्यय से ‘द्वि’ बना है । जिसका चीरनेवाला वा आदर करनेवाला अर्थ है ।

त्रि— ‘तृ’ (प्लवनतरणयोः) धातु से द्वि प्रत्यय करने से बना है । उणादि में इस के लिये ‘तरतेर्द्विः’ यह सूत्र ही है । जो पानी पर तैरे वह ‘त्रि’ है ।

चतुर— ‘चते’ (याचने) धातु से उणादि के तुर् प्रत्यय से बना है । चारो ओर जाँचे वह ‘चतुर’ है ।

पञ्च— ‘पचि’ (विस्तारे) धातु से उणादि अन् प्रत्यय करने से बना है । जो फैला हो वह ‘पञ्च’ है ।

षट्— ‘षट्’ (अवयवे) धातु से उणादि क्तिप् प्रत्यय से बना है । जिसमें अवयव (कई हिस्से) हों वह ‘षट्’ है ।

सप्त— ‘षप्’ (समवाये) धातु से उणादि कनिन् प्रत्यय और तुट् ले आने से बना है । भट्टोजिदीक्षित अपनी सिद्धान्तकौमुदी में लिखते हैं— ‘समवायः सम्बन्धः सम्यगवबोधो वा,’ याने समवाय से सम्बन्ध या अच्छी तरह से ज्ञान लिया जाता है । इस लिये जिससे अच्छी तरह ज्ञान हो वह ‘सप्त’ है ।

अष्ट— ‘अशू’ (व्याप्तौ संघाते च) धातु से उणादि कनिन् प्रत्यय और तुक् के ले आने से बना है । जो सब जगह मौजूद (व्याप्त) हो वह ‘अष्ट’ है ।

नव— ‘णु’ (स्तुतौ) धातु से उणादि कनिन् प्रत्यय करने से बना

है । जो तारीफ के लायक हो वह ‘नव’ है ।

श्रीहर्ष के समय हमारे लोगों के कान की जैसी सूरत है उसी तरह का ‘नव’ लिखा जाता था । उन्होंने अपने काव्य नैषधचरित के सातवें सर्ग के ६३वें श्लोक में दमयन्ती के कान की उपमा ‘नव’ अंक से दी है—

अस्या यदष्टादश संविभज्य विद्याः श्रुती दध्रतुर्धर्मधम् ।

कर्णान्तरुक्तीर्णगभीररेखः किं तस्य संख्यैव न वा नवाङ्कः ॥

लोग जब कागज बनाना नहीं जानते थे उस समय ताड़ के पत्ते पर लोहे की नोकदार कलम से खोद खोद कर अक्षरो की सूरतें बनाते थे । वे आँखों से अच्छी तरह देख पड़ें इस गरज से खोदे हुए ताड़ के पत्तों को करखी से लीप देते थे । करखी खोदे हुए अक्षरों में घुस जाती थी जिससे उनकी सूरत साफ साफ देख पड़ती थी । इस लीपने ही पर से अक्षरों का दूसरा नाम ‘लिपि’ पड़ गया । वार्त्तिककार कात्यायन के समय के पहले ही से यह ‘लिपि’ अक्षरों के अर्थ में प्रचलित हो गई थी इसी लिये पाणिनि के सूत्र पर कात्यायन ने ‘यवनाल्लिप्याम्’ यह वार्त्तिक बनाया । इसी से ‘यवनानां लिपिः’ यवनानी यह सिद्ध किया है । यहाँ यवन से ग्रीक लोग हैं । इसमें कुछ भी संशय नहीं कि कात्यायन के समय में ग्रीक लोग हिंदुस्तान में अच्छी तरह से व्यापार करने के लिये आते जाते थे । इस पर ग्रीक के अंकप्रकरण में कुछ विशेष लिखा जायगा ।

लिपि ही को लेकर आज कल हम लोग काश्मीरीलिपि, देवनागरीलिपि, बोलते हैं ।

अब भी बंगाल और मद्रास के बहुत लोग शौक से ताड़ के पत्तों पर लिखते हैं ।

लिप (उपलेपे) धातु से ‘इक् कृष्यादिभ्यः’ सूत्र से इक्

प्रत्यय करने से (लिप्यते इति लिपिः = जो लीपा जाय वह लिपि है) 'लिपि' बना है। अमरकोश में लिखा है कि—“लिखिताक्षर-विन्यासे लिपिलिखिरुमे स्त्रियौ ।”

पुराने समय के मीमांसा, वेदांत, न्याय और व्याकरण के पंडित हिसाब की ओर कुछ भी ध्यान नहीं देते थे। इस लिये वे लोग लिखे हुए ताड़ के पत्तों के बीच में एक या दो छेद कर उनके बीच में एक या दो मजबूत सूत की डोरी पहना देते थे जिस से उन पत्तों का उलट पुलट न हो। वे पत्ते उस ढोरे में माले की मनिआँ ऐसे पड़े रहते थे। बनारस संस्कृत कालेज, एशियाटिक सोसाइटी बंगाल, के पुस्तकालयों में इस तरह की बहुत पोथियाँ मौजूद हैं। बहुत पोथियाँ 'तारिएट' (बजरबट्ट) पेड़ के पत्तों पर भी लिखी हुई हैं।

अब भी ज्यौतिषियों को छोड़ कर और शास्त्रवाले बहुत पंडित सौ के ऊपर की संख्या लिख पढ़ नहीं सकते।

बनारस, चौकाघाट के पास बरना नदी के दहिने किनारे पर वेदांती साधुओं का एक अखाड़ा है। वहाँ पर पहले बड़े पंडित एक वैष्णवदास नाम के बाबा रहते थे। मेरे पिता ने उन से कई एक पुराण पढ़े थे। मैंने भी उन से व्याकरण पढ़ा था।

एक समय बरसात के बाद चित्रा के सूर्य में वे अपनी पोथियों को घाम दिखाते थे। हवा के झकोर से उन के व्याकरण महाभाष्य के सब पन्ने उड़ कर छितर बितर हो गए। बाबाजी पढ़ पढ़ कर पाठों की संगति से उन पन्नों को लगाने बैठे। सवेरे दश बजे से लेकर शाम तक पन्ने न लगे। अंत में हार मान कर बड़े उदास हो कर बैठे। उसी समय मैं भी पढ़ने के लिये वहाँ पहुँचा और बाबाजी को बहुत उदास देख कर पूछा कि आज आप की कैसी तबीयत है। उन्होने कहा कि पन्नों के उलट पुलट हो जाने

से मेरी महाभाष्य की पोथी खराब हो गई। मैंने हँस कर कहा कि आप उदास क्यों होते हैं मैं अभी पन्नों को लगा देता हूँ; पन्नों पर गिनती के अंक तो हैं न?। उन्होने कहा कि अंक तो हैं पर वे मुझे समझ नहीं पड़ते। मैंने आध घंटे में सब पन्नों को लगा दिया। बाबाजी ने इस पर बहुत खुश हो कर मुझे एक अच्छी ऊन की लोई इनाम दी।

यह न समझो कि जैसी जयरामजी ने ऊपर तिरछी और खड़ी रेखाओं के मेल से अंकों की एक तरह की सूरत दिखाई है वही सब के मन में आई। अपने अपने समय में जुदे जुदे देश के लिखनेवाले जुदी जुदी तरह से खड़ी और तिरछी रेखाओं को मिला कर तरह तरह की अंकों की सूरत दिखाई है।

ब्याबिलोनिया (Babylonia) के

ज्यौतिषियों के अंक ।

ब्याबिलोनिया के रहनेवाले ज्यौतिषी इस खड़ पंजे से एक, दोनों पंजों को हाथ जोड़ने के ऐसा तिरछा रखने से < दश, > इस से सौ, >> इस से दो, >>> इस से तीन, >>> इस से चार, >>> इस से तेइस और <<<< इस से तीस लेते थे। वे लोग हजार को <<<< ऐसे लिखते, याने पहले दश से यह दिखलाते थे कि दशगुना >> सौ है। उन के यहाँ इस हजार की बाईँ ओर फिर < दश रखने से दश हजार होता है।

परशिया में बड़े सिकंदर बादशाह के समय इन्हीं पंजों की सूरत से अक्षर बने हैं। उस वर्णमाला में >>< = अलिफ, >> = बे। और अक्षरों के लिये सन् १८५३ ई० में जर्मन में छपी *Alphabete orientalischer und Occidentalischer Sprachen*, को देखो।

व्याबिलोनिआ में आज तक जो संख्याएँ पाई गई हैं सब दशलाख के नीचे की हैं । वहाँ की दो सारणी भी मिली हैं । पहली में एक से लेकर साठ तक के वर्ग लिखे हैं । संभव है कि यह सारणी ईशामसीह के पहले २३०० और १६०० वर्ष के बीच में बनाई गई हो । इस सारणी में अंकों के स्थान साठगुने हैं क्योंकि उस में $८^२ (=६४) = १, ४$ ऐसा लिखा है । इसी तरह $९^२ = १, २१$ । $१०^२ = १, ४०$ । $११^२ = २, १$ ऐसे लिखे हैं ।

हिंदुओं में भी ग्रहों के गणित और दृष्टकाल में अंकों के साठगुने स्थानों की रीति आज तक प्रचलित है । संस्कृत में ६४ कला को १ ऐसा लिखते हैं । सब से बड़े स्थान के अंक को सब से ऊपर और उस से कम को नीचे लिखते हैं ।

हिंदुओं में दिन का साठवाँ भाग घटी, घटी का साठवाँ भाग पल और पल का साठवाँ भाग विपल कहाता है । आर्यभटीय के कालपाद में लिखा है—

“षष्टिर्नाड्यो दिवसः षष्टिस्तु विनाडिका नाडी ।”

प्रचलित सूर्यसिद्धान्त में लिखा है कि ग्रहों के गणित का ज्ञान सूर्य से मयदैत्य को मिला फिर मय ने लंका की आधीरात में उस गणित का प्रचार किया (मेरी बनाई सूर्यसिद्धान्त की टीका सुधावर्षिणी देखो) । पता लगाने से मालूम होता है कि मय ग्रीक था । संस्कृत में ग्रीक को लोग यवन या म्लेच्छ कहते थे । वराहमिहिर ने अपनी बृहत्संहिता में लिखा है—

“म्लेच्छा हि यवनास्तेषु सम्यक् शास्त्रमिदं स्थितम् ।

ऋषिवत् तेऽपि पूज्यन्ते किं पुनर्ब्रह्मविद् द्विजः ॥”

बहुत लोगों का मत है कि ग्रीक पंडित हाइप्सिक्लेस (Hypsicles) और टालमी (Ptolemy) व्याबिलोनिआ

से इस साठ विभाग (कला, विकला) को अपने देश में लाए फिर वहाँ से हिंदुस्तान में भी वही रीति फैली । जो हो पर ३६० सौर दिन का एक सौर वर्ष यह ऋग्वेद में भी लिखा है ।

द्वादश प्रथमश्चक्रमेकं त्रीणि नभ्यानि क उ तच्चिकेत ।

तस्मिन्साकं त्रिशता न शंकवोऽर्पिताः षष्टिर्न चलाचलासः ॥

(ऋ. सं. १, १६४, ४८.)

व्याबिलोनिआ की दूसरी सारणी में अमावास्या के अंत से पूर्णिमा के अंत तक चंद्रविंब के शुक्ल मान लिखे हैं । शुक्लपक्ष की परिवा से पंचमी तक शुक्लमान ५।१०।२०।३०।१, २०=८०, ये लिखे हैं । फिर आगे हर एक तिथि में सोरह सोरह की बढ़ती से शुक्ल के मान लिखे हैं । इस सारणी में चंद्रविंब=२४० लिखा है । पहले पाँच तिथि तक शुक्ल गुणोत्तर श्रेढी में फिर पीछे योग श्रेढी में लिखे हैं ।

षड्विंश ब्राह्मण में लिखा है कि चन्द्रमा में १६ कला रहती है; कृष्णपक्ष की पंचमी तक पाँच कला देवता, ६-१० तक रुद्र, ६-१० कला और ११-१५ तक वसु ११-१५ कला पीते हैं । अमावास्या के दिन सोरहवीं कला चंद्रमा में बच जाती है उसी से और देव-रुद्र-वसुओं के उपाय से फिर पूर्णिमा तक चंद्रमा में सब कला आ जाती है ।

“देवा दिव्येन पात्रेणादित्याः प्रथमं पञ्चकलं पञ्चमी भक्षयन्ति ।

तेऽन्तरिक्षेण पात्रेण रुद्रा द्वितीयपञ्चकलं दशमी भक्षयन्ति ॥

ते पृथिव्या पात्रेण वसवस्तृतीयं पञ्चकलं पञ्चदशी भक्षयन्ति ।

षोडशी कलाऽवशिष्यते षोडशकलो वै चन्द्रमाः ॥”

(षड्विंशब्राह्मण, ४प्रपाठक, ६ खण्ड)

मैं समझता हूँ कि सूक्ष्म शुक्ल की गिनती करने के लिये हर एक कला के किसी ने १६ हिस्से किए इस लिये चंद्रविंब=२५६ । इस में सोरहवीं कला के, जो चंद्र के भीतर अक्षय बच जाती है,

१६ हिस्से निकाल देने से चंद्रमा का विंब $२५६-१६=२४०$ ठहराया है। चंद्रविंब से, यहाँ थाली ऐसा जो पूर्णिमा के दिन गोल चंद्रमा देख पड़ता है उस का व्यास है।

चंद्रपरिधि का व्यास २४० मानना वैसा ही है जैसा कि हमारे यहाँ वराहमिहिर और और लोगों ने वृत्त का व्यासार्ध १२० याने वृत्त-व्यास २४० मान कर चापो की जीवा कोटिज्या बनाए हैं। (पञ्चसिद्धान्तिका देखो)

मेरी समझ में दूसरी सारणी में पहली चार संख्या जो ५, १०, २०, ४०, हैं वे सोरह गुने स्थान के हैं इस लिये $५=५$, $१०=१ \times १६ + ० = १६$, $२०=३२$ और $४०=६४$ ये हुए। ६४ चतुर्थी का शुक्र, ५ यह शुक्रपक्ष के परिचा के तीसरे हिस्से का शुक्र है। तृतीया का शुक्र $३०=४८$ यह सारणी में छूट गया है क्योंकि जब चंद्र=२४० और तिथि=१५ तो एक तिथि में शुक्र $=\frac{२४०}{१५}=१६$ होना चाहिए इस लिये हर एक तिथि में सोरह सोरह की बढ़ती होनी चाहिए।

एजिप्ट के अंक और शब्द।

तीसरे रामेसेस (Rameses III) के राज के एक प्रकार के पेंड की छालों पर लिखे हुए अंक मिले हैं। उन से पता लगता है कि उस समय एजिप्ट के लोगों ने तरह तरह के हंसों के मुहों की सूतों से अंकों के स्थान दिखलाए हैं। इन के यहाँ अंकों के दो तरह के चिह्न मिलते हैं, एक चिह्न हिसाब के लिये और दूसरा खंभे वगैरह में खोदने के लिये था। ईशामसीह के पहले १२०० वर्ष की यह बात है।

हिसाब करने के लिये उन के यहाँ—

$$१=I=उआ (Ua)$$

$$२=II=सेन (Sen)$$

$$३=III=ज़ेमेट (Zemet)$$

$$४=IIII=फूट या आफूट (Ftu or Ofu)$$

$$५=\begin{array}{c} || \\ || \\ \times \end{array} \} = दुआ (Tuaw)$$

$$६=\begin{array}{c} || \\ || \\ || \end{array} = सास् (Sas)$$

$$७=\begin{array}{c} || \\ || \\ || \\ || \end{array} = सेफेज़ (Sefez)$$

$$८=\begin{array}{c} || \\ || \\ || \\ || \\ || \end{array} = ज़ेमेन्न्यू (Zemennu)$$

$$९=\begin{array}{c} || \\ || \\ || \\ || \\ || \\ || \end{array} = पौत या पेस्ट (Paut or pest)$$

$$१०= \cap = मेद् (Mel)$$

$$२०= \cap \cap = तौत् (Taut)$$

$$३०= \cap \cap \cap = माब् (Mab)$$

$$४०= \cap \cap \cap = हेमेंट (Hement)$$

$$५०= \cap \cap \cap = ?$$

$$६०= \cap \cap \cap \cap = ?$$

$$७०= \cap \cap \cap \cap = सेफेज़ (Sefez) ?$$


$$८०= \cap \cap \cap \cap \cap = ज़ेमेन्नूआ (Zemennua)$$


$$९०= \cap \cap \cap \cap \cap \cap = ?$$


$$१००= \text{⌒} = सा (Saa)$$

$$१०००= \text{⌒} = जा (Za)$$

$$१००००= \text{⌒} = ताब् (Tab)$$

१००००० =  = हेफेन्नु (Hefennu)

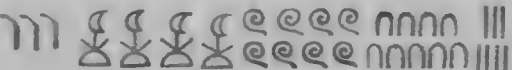
१०००००० =  = हेह (Heh)

१००००००० =  = सेन्नु (Sennu)

ये चिह्न हैं।

लाख के लिये एक मेंडक, दश लाख के लिये दोनो हाथ उठाए एक बैठा आदमी और करोड़ के लिये एक गोला है। सौ, हजार और दश हजार के लिये तीन तरह के हंसों के मुँह हैं। दश के लिये मिले हुए दोनो पंजे हैं। जो आदमी से जलमानुस और गोले से किसी पानी के जानवर के अंडे या हड्डी ले तो दश के ऊपर सब स्थानों के लिये पानी ही के पदार्थ माने गए। आगे चल कर देखोगे कि यही बात हिंदुओं में भी है।

ये लोग भी हिंदुओं के ऐसा एकाई से बाईं ओर और ऊँचे ऊँचे स्थानों को रखते थे। जैसे—

 = ३४८९७।

इन के यहाँ करोड़ से ऊपर के स्थान नहीं जान पड़ते और शून्य के लिये भी कोई निशान नहीं जान पड़ता।

खंभों पर खादे हुए अंक येही हैं पर उन के आगे पीछे कुछ बेल, बूटे, छुरी, चिड़ियों ... की सूरत बड़ी खूबसूरती के साथ बनी हुई हैं। जिसे और बातें जाननी हो वह E. A. Wallis Budge, M. A. की Books on Egypt and Chaldaea Vol. III देखे।

पिकाक (Rev. G. Peacock. D. D.) साहब ने ऊपर दिखलाई एजिप्ट के अंकों की सूरत कुछ फेर फार से लिखी है (उन के समय की साइकोपीडिया देखो)।

ऊपर जो अंक लिखे गए हैं उन में ७ और सत्तर के एक ही शब्द हैं, समझ पड़ता है कि किसी एक में जरूर गलती है।

ग्रीस देश के अंक।

ग्रीस देश में जो रहते हैं उन्हें ग्रीक कहते हैं। वे लोग अपनी वर्णमाला के अक्षरों से अंक दिखलाते थे। जैसे—

Α' = १, Β' = २, Γ' = ३, Δ' = ४, ..., Θ' = ९।

Λ' = १०, Κ' = २०, Ξ' = ३०, ...

Ϛ' = १३, Ϝ' = १४, ...

ϞϟϠ' = ९९९९।

यही रीति आर्यभट्ट के ग्रंथ में भी पाई जाती है (गणक-तरङ्गिणी देखो)

सब से ऊँच हिंदू याने ब्राह्मण लोग अपने धर्म के बंधन से अटक और कटक के पार न गए और अब तक नहीं जाते। वेद में लिखा है कि सरस्वती नदी के पार न जाना चाहिए। धर्मशास्त्रों में लिखा है—

“अङ्गवङ्गकलिङ्गेषु सौराष्ट्रमगधेषु च।

तीर्थयात्रां विना गत्वा पुनः संस्कारमर्हति ॥”

याने खाली सैर करने के लिये इन देशों में जाने से फिर से संस्कार (जनेऊ) करना चाहिए। ‘अवधौ यानं द्विजस्यैव’ याने खाली ब्राह्मण के लिये समुद्रयात्रा मना है।

ब्राह्मण लोग अपने विद्यासंबंधि विचारों ही को सब से बड़ा धन मानते थे। इन के मत में संतोष ही सब से बड़ा धन है, उसी में सब से बढ़ कर सुख है (सन्तोषं परमं सुखम्)। इन सब के कहने का इतना ही प्रयोजन है कि ब्राह्मण लोग बाहर नहीं गए, विद्याभ्यास में लगे रहने से अपनी शरीर की बाहरी शक्ति को कम कर क्षत्रिय राजाओं के भरोसे निश्चित रहे। बाहर ही

के लोग सब बातों का पता लगाते लगाते यहाँ आने लगे। सब से पहले अरब के लोग और ग्रीक यहाँ आए। मेल जोल हो जाने से हिंदुओं ने बहुत बातें उन लोगों से और उन लोगों ने बहुत बातें हिंदुओं से सीखी।

बड़े सिकंदर बादशाह के समय ग्रीस के व्यापारी, पंडित, ... सभी हिंदुस्तान में आए। दो सौ वर्ष तक इस हमारे पश्चिमोत्तर प्रदेश (*United Provinces*) और पंजाब में ग्रीक लोग राज करते थे।

जैसे आज कल सैकड़ों अंगरेजी शब्द हिंदुओं में और सैकड़ों संस्कृत-हिंदी शब्द अंगरेजों में प्रचलित हैं इसी तरह उस समय ग्रीक और हिंदुओं के शब्द आपस में प्रचलित हुए।

जैमिनिन्यायमाला के १ अध्याय, २ पाद, ६ अधिकरण में लिखा है—

“कल्प्यः पिकादिशब्दार्थो ग्राह्यो वा म्लेच्छरूढितः।

कल्प्यो ह्यार्यैर्वसिद्धत्वादनार्याणामनादरात् ॥

ग्राह्या म्लेच्छप्रसिद्धिस्तु विरोधादर्शने सति।

पिकनेमादिशब्दानां कोकिलाद्यर्थता ततः ॥”

इस की टीका में माधवाचार्य लिखते हैं—

“..... कल्प्यमानादव्यवस्थितादर्थाद्वरं म्लेच्छरूढिः। तस्मादनार्यप्रसिद्ध्या पिकः कोकिलः। नेमशब्दोऽर्धवाची। तामरस-शब्दः पद्मवाचीत्येवं द्रष्टव्यम्।”

फारसी में नीम आधे को कहते हैं उसी को जैमिनि ने ‘नेम’ कहा है। पर पिक (कोयल) और तामरस (कमल) के लिये मैंने यहाँ के कई एक मौलविओं से पूछा पर उन लोगों ने यही कहा कि हमें फारसी या अरबी में पिक (कोयल) और तामरस (कमल) नहीं मिलता। कई एक

यूरप के लोगों से भी पूछा कि शायद ये ग्रीक शब्द हों पर वहाँ भी पता न लगा। पिक और तामरस के म्लेच्छ शब्द होने में संशय नहीं क्योंकि ऐसा न होता तो जैमिनि क्यों लिखते। जैमिनि के समय में ये म्लेच्छ शब्द जरूर प्रसिद्ध थे, पर बात पुरानी पड़ जाने से इस समय पता नहीं लगता है, कि ये शब्द किस म्लेच्छभाषा के हैं।

कस्तूरी, खलीन (लगाम), इत्थम् (इस तरह), मिलिन्द (भ्रमर), दीनार (अशर्फी), मय, यवन, मणित्थ, ..., (गणकतरङ्गिणी देखो) ग्रीक लोगों से हिंदुओं में आए।

इंडिया (सैन्धव), त्रिज (भूर्ज), पिपर (पिप्पली), ..., ये हिंदुओं के शब्द सिकंदर के पहले पर्सियन होते हुए कुछ कुछ उच्चारण में भेद ढांते होते ग्रीक लोगों में प्रचलित हुए।

कप्पूर, (*Kappura*) (कपूर), कोष्टस (*Kostas*) (कुष्ठी=कोढ़ी), ताल (*Tala*), देव (*Deva*), ..., ये संस्कृत शब्द आपस के मेल जोल से ग्रीक लोगों में प्रचलित हुए।

हिंद के व्यापारी पहले पहल पर्सिया के बबेरु में जिसे पुराने जमाने में वहाँ के लोग बबिरु (*Babiru*) कहते थे मोरैले बेंचने के लिये ले गए थे फिर वहाँ के व्यापारी उन को मोल ले कर उधर जहाँ बेंचे वहाँ मोरैले को लोग बबेरु की चिडिया कहने लगे। बौद्धों में भी बहुत जातकों में से एक ‘बबेरुजातक’ है जिस पर सन् ५ ई. में बुद्धघोष ने एक टीका बनाई है।

बाइबिल में भी लिखा है कि सुलेमान के समय में फोनिसियंस (*Phoenicians*) बहुत चीजों के साथ आफिर (*Ophir = Abhira*) से मोरैले भी लाए थे।

“For the king had at sea a navy of Tar-

*shish with the navy of *Hiram: once every three years came the navy of Tarshish bringing gold and silver, ivory, and apes, and peacocks."*

1 kings. 10:22. & 2 Chroniclos 9:21.

आपस का मेल जोल बहुत पुराने समय से चला आता है ।

पाणिनि-अष्टाध्यायी के पातञ्जलमहाभाष्य में लिखा है—

“शवतिर्गतिकर्मा कम्बोजेष्वेव भाषितो भवति विकार एवैनमार्या भाषन्ते शव इति । हम्मतिः सुराष्ट्रेषु रंहतिः प्राच्यमध्यमेषु गमिमेव त्वार्याः प्रयुज्यते । दातिर्लवनाथे प्राच्येषु दात्रमुदीच्येषु ।”

याने कम्बोज में चलने को शवति, कहते हैं आर्य लोग विकार याने मुर्दे को शव कहते हैं । सुराष्ट्र में चलने को ‘हम्मति’ और पूर्वमध्यम में ‘रंहति’ कहते हैं । पूर्व में लवन को ‘दाति’ और उत्तर में ‘दात्र’ कहते हैं । उसी के आगे फिर महाभाष्य में लिखा है—

“एकैकस्य हि शब्दस्य बहवोऽपभ्रंशाः । तद्यथा । गौरित्यस्य शब्दस्य गावी गौणी गोता गोपोतलिकेत्येवमादयोऽपभ्रंशाः ।”

याने एक ‘गौ’ शब्द के गावी, गौणी, गोता, गोपोतलिका, ..., अपभ्रंश हैं । ये अपभ्रंश शब्द कहाँ कहाँ बोले जाते थे इसका पता लगाना अब कठिन है । पर इस में संशय नहीं कि उस समय भी हिंदुस्तान में भिन्न भिन्न भाषा थी, खाली आर्य लोगो में संस्कृत का प्रचार था ।

आर्य लोगो के देश की सीमा मनु ने लिखी है ।

सरस्वतीदृषद्वत्योर्देवनद्योर्दन्तरम् ।

तं देवनिर्मितं देशमार्यावर्त्तं प्रचक्षते ॥

(मनुस्मृ. अध्याय. २ श्लो. १७)


















जब से हिंदुस्तान में ग्रीक लोग आए तभी से यहाँ फलित-ज्यौतिष का प्रचार फैला । फलित ही में बहुत से ग्रीक और अरबी के शब्द पाए जाते हैं । (बृहज्जातक और नीलकंठी देखो) । फलित के प्रभाव से हिंदुस्तान ऐसा दब गया कि जौ आज से फलित की ओर पीठ दे कर गणित को देखने लगे तो शायद हजारों वर्ष में यूरोप की बराबरी में आवे ।

यह काल की महिमा है कि जिस देश के धूर पर के अंक से सारे देश के लोग पंडित हो गए और होते जाते हैं उस देश के पंडित धूर में मिले जाते हैं तो भी दिन रात घमंड-नशे में चूर हैं ।

जैसे यहाँ स्त्रियो के बीच यंत्र-मंत्र का प्रभाव है उस से सौगुना स्त्री-पुरुषों में फलित-ज्यौतिष का प्रभाव है । जिस गणित के आधार से फलित जी रहा है उसे लोग दिनों दिन भूलते जाते हैं । अँगरेजी में बी. ए., एम्. ए. तक लोग खाली पास होने के लिये गणित पढ़ते हैं । पास हो जाने पर हजारों में से बिरला कोई ऐसा होगा जो गणित की चर्चा करता हो ।

फलित को कृत्या समझना चाहिए । यह यूरोप में भी क्यार्डन, केप्लर, ... के गले में लटकती थी ।

साबियन (Sabaeen) लोगो के अंक ।

१ = , २ = , ३ = , ४ = ,
५ = , ६ = , ७ = , , ...,
१० = , ११ = , १२ = , ...,
१५ = , १७ = , १८ = ,
१९ = , २० = , २२ = , ...

* Hiram was king of Tyre, a city of Phoenicia. See 1 kings 5:1 etc.

२५ = IIIV , ३० = IIIIII , ४० = IIIIIIII , ...,
 ४७ = IIIIIIIIII , ५० = IIIIIIIIII , ६० = IIIIIIIIII , ...,
 ६३ = IIIIIIIIII , १०० = IIIIIIIIII , १००० = IIIIIIIIII ,
 ३००० = IIIIIIIIII , ४००० = IIIIIIIIII ,

अरबी का I = I = अलिफ । अरबी का II = II = गैन ।

१-४ इसके और एजिप्ट के एक ही हैं, भेद इतना ही है कि यहाँ सब दो खंभे के भीतर हैं । साबिअन लोग अरब में सन् १ ई० में थे ।

रोमन के अंक ।

१ = I, २ = II, ३ = III, ४ = IIII या IV, ५ = V,
 ६ = VI, ७ = VII, ८ = VIII, ९ = IX, १० = X, ५० = L,
 १०० = C, ५०० = D या इसकी बिगड़ी सूरत D, १००० = CIO,
 ५००० = IOO, १००००० = CCIOO, या शिर पर तिरछी रेखा
 कर देने से सब संख्या हजार गुनी हो जाती है जैसे I = १००० ।
 V = ५०००, ... । १००० इस के लिये M और भी एक संकेत है ।

पहली चार संख्या एक पंजे की चार खड़ी अँगुलियों से बनी हैं । पाँच खड़े एक पंजे से, उस के आगे एक, दो, तीन के मिलाने से ६-८, दश दो पंजों के मिलाने से और दश की बाईं ओर एक रख देने से ९ बना है । कहीं कहीं पुराने लेखों में XX = XX = २०, XXX = XXX = ३० ।

चीन के अंक ।

चीन में तीन प्रकार के अंक हैं । पहले में \rightarrow , दूसरे में II और तीसरे में I ऐसा एक लिखा जाता है । अंक और

शब्द नीचे लिखे हैं ।

१ = \rightarrow 壹 I = Uay = याय ।
 २ = II 貳 II = Urh = उर्ह ।
 ३ = III 參 III = San = सन् ।
 ४ = IIII 肆 X = See = सी ।
 ५ = IIII 伍 U = Woo = वू ।
 ६ = IIII 陸 L = Lo = लो ।
 ७ = IIII 柒 T = Tse = त्से ।
 ८ = IIII 捌 P = Pa = पाँ ।
 ९ = IIII 久 K = Keen = क्यू ।
 १० = IIII 拾 C = Che = चे ।

१०० = IIII 百 P = pe = पे ।
 १००० = IIII 千 T = Tsiin = त्सीयन् ।
 १०००० = IIII 萬 W = Wan = वान् ।
 १००००० = IIII 億 C = Che } चे
 १०००००० = IIII 兆 W = Wan } वान् ।
 १००००००० = IIII 京 T = Táo = टाऊ ।
 १०००००००० = IIII 垓 K = King = किंग ।
 १००००००००० = IIII 垓 K = Kai = कै ।

तिब्बत में अंकों के शब्द ।

१ = (Cheic) = चेइक । ६ = (Tru) = टू ।
 २ = (Gnea) = ग्नेआ । ७ = (Toon) = टून ।
 ३ = (Soom) = सूम । ८ = (Ghe) = घे ।
 ४ = (Zea) = जेआ । ९ = (Goo) = गू ।
 ५ = (Gna) = गा । १० = (Chu Tambha) = चूतंभ ।
 ११ = (Chucheic) = चू चेइक ।

१२ = (*Chugnea*) = चू भेआ ।

... ..

२० = (*Gnea Chutambha*) = भेआ चूतंभ ।

२१ = *Gnea cheic*) = भेआ चेइक ।

... ..

२९ = (*Gnea Goo*) = भेआ गू ।

३० = (*Soom Chutambha*) = सूम चूतंभ ।

३१ = (*Soom cheic*) = सूम चेइक ।

... ..

इस में ग्यारह से उन्नीस तक की संख्याएँ दश के पहले खंड चू और एक, दो, ... के नाम से बनाई गई हैं, २० दो और दश से; बाकी २१, २२, ... २९ दहाई और एकाई के अंकों के नाम से। इसी तरह आगे भी सब संख्याएँ बनी हैं।

इस तरह स्थानों के अंकों से संख्याओं को दिखलाना यह बहुत अच्छी और सहज रीति है पर न जाने लोगों ने पीछे से इस रीति को क्यों छोड़ दिया। दूसरे आर्यभट्ट ने भी अपने ग्रंथ में इसी तरह की संख्याओं को दिखलाया है (मेरा छपवाया महासिद्धान्त देखो)। दक्षिण में बहुत जगह अब तक दूसरे आर्यभट्ट के ऐसा वर्णमाला के अक्षरों से संख्याओं को दिखलाते हैं।

बहुत लोग कहते हैं कि यूरप के लोग संख्या लिखने की रीति तिब्बत से सीखी है। जहाँ यह बात होती तो उनके यहाँ ११-१९ के लिये सब जगह तिब्बत के ऐसा पहले १० फिर १-९ के शब्द आते। और २१-२९ भी तिब्बत के ऐसे बोले जाते।

बस्के (*Basque*) में १ = *Bat* = वाट्, २ = *Bi* = वि है। हिंदी भाषा के पिंगल ग्रंथ और काव्य में भी 'वि'

से दो लेते हैं। बाबा दीनदयालजी ने अपने अनुरागवाग में एक जगह 'विविकी की पर' (विवि = $२ \times २ = ४$, विविकी = चारकी = पालकी) लिखा है। हिंदी पिंगल में बहुत जगह 'वि' आता है। मैं समझता हूँ कि संस्कृत 'द्वि' के द के निकल जाने से 'वि' रह गया जिसे पीछे से हिंदी में 'वि' कहने लगे।

पुरानी हिब्रू वर्णमाला में २२ अक्षर हैं। उनके यहाँ भी अक्षरों से संख्या दिखाई जाती थी। वे लोग अलेफ से तेथ तक नव अक्षरों से १-९ संख्या लेते थे फिर जाद = ७ = १०। काफ = ८ = २०, ... उनके यहाँ हम लोगों से उलटी चाल पाई जाती है। जैसे—

१ = \aleph = अलेफ, २ = \beth = बेथ। और २१ = $\aleph \beth$ यह हम लोगों से उलटी चाल है। उनके यहाँ ४०० से ऊपर की संख्याओं के लिये कोई चिन्ह नहीं था। ४०० ऊपर की संख्याएँ कई संख्याओं के जोड़ से दिखलाते थे। जैसे १०० = p = कफ। २०० = γ = रे। ३०० = λ = लीन। ४०० = π = तो। ५०० = $p \aleph$ । ६०० = $\gamma \aleph$ । ७०० = $\lambda \aleph$ । ८०० = $\pi \aleph$ । ९०० = $p \pi \aleph$, ...।

पुरानी अरबी की वर्णमाला में २२ अक्षर हैं वे सिरिआक (*Syriac*) के अक्षरों से बने हैं। आज कल की वर्णमाला में २८ अक्षर हैं। यह वर्णमाला लगभग सन् ८०० ई. से प्रचलित हुई है। इनके यहाँ भी हिब्रू के ऐसा अक्षरों से संख्या दिखलाई गई है। इनके यहाँ १००० तक चिह्न हैं आगे पिछली संख्याओं के जोड़ से संख्याएँ लिखी जाती हैं। जहाँ जहाँ सेमेटिक (*Semitic*) अक्षर प्रचलित हैं सब जगह अक्षरों से संख्याएँ दिखाई गई हैं।

रसियन (*Russian*) वर्णमाला ग्रीक अक्षरों से बनी है। उसमें ३६ अक्षर हैं। वहाँ भी अक्षरों से संख्याएँ दिखाई

२६

गणित का इतिहास

गई है । उनके यहाँ १०००० तक चिह्न है फिर अक्षरों में ग्रीक ऐसा स्वर लगा कर और संख्याएँ बनाई गई हैं । उनके यहाँ दश करोड़ से अधिक संख्या नहीं है । बड़े पीटर (Peler the Great) ने अपने समय में हिंदुओं के अंकों का प्रचार किया ।

अशोक राजा के समय के अंक ।

देखो २०० = १०० और दो के, ३०० = १०० और ३ के, ४०० = १०० और ४ के, ५०० = १०० और ५ के, ६०० = १०० और ६ के, ७०० = १०० और ७ के, २००० = १००० और २ के, ३००० = १००० और ३ के, ४००० = १००० और ४ के, ६००० = १००० और ६ के, ८००० = १००० और ८ के, १०००० = १००० और १० के, २०००० = १००० और २० के और ७०००० = १००० और ७० के मिलाने से बने हैं । ध्यान कर देखो तो मिलाने में लिखने या खोदनेवाले की गलती से कुछ कुछ मिली हुई संख्याओं की सूरत में फर्क है । खोदे हुए अंकों को फिर से ध्यान देकर देखना चाहिए ।

संख्याओं के देखने से साफ है कि अशोक के समय शून्य नहीं था और न दशगुने स्थान के अनुसार लिखने की रीति थी ।

इस में संशय नहीं कि सब जगह अंगुलिओं पर गिनती करने से दहाई प्रचलित हुई खाली दो चार जगह दहाई से घटती बढ़ती हुई । जैसे फल बेचनेवालों में गाही और कौरी प्रचलित है । न्यू जी ल्यांडर में ग्यारहगुने स्थान हैं वे लोग १२ को ११ + १, १३ को ११ + २, ... और २२ को दो ग्यारह बोलते हैं ।

हिंदुस्तान में जस ग्यारह, बारह, ... अठारह के बोलने में पहले एकाई और उसके बाद दहाई आती है, वैसी चाल सब जगह नहीं है । जैसे ल्याटिन में अठारह को *Deccem et ocio* = १० + ८, ग्रीक में *O'k Too - kai - Seka* = ८ + १०, फ्रेंच में *Dix - Huit* = १० + ८, जर्मन में *Acht-Zehn* = ८ + १० ऐसा बोलते हैं । अज़टेक में अठारह को *Ca.Xtulli-om-ey* = १५ + ३ ऐसा बोलते हैं ।

पीछे लिख आए हैं कि चीन में सन् (*San*) = ३ और चे (*Chè*) = १० है । इन को मिला कर वे लोग चे-सन से (१० + ३) तरह लेते हैं । यह रीति हिंदुओं से उलटी है । और वे लोग सन्-चे से (३ × १०) तीस लेते हैं । यह रीति हिंदुओं की रीति से मिलती है । संस्कृत में कभी कभी त्रिदश से ३० लेते हैं ।

व्यापारी लोग कहीं कहीं अपने खास लोगों में समझने के लिये और ही शब्दों से संख्याओं को बोलते हैं, जैसे बना-रस के दलाल—

१ = साँग । २ = स्थान । ३ = एकवाई । ४ = फोक । ५ = बुध । ६ = डहक । ७ = पैत । ८ = मंग । ९ = कोन । ० = सलाह, ... ऐसा कहते हैं ।

संस्कृत में अंकों के शब्द और चिह्न ।

वैयाकरण लोग शब्द को परब्रह्म ऐसा अनादि मानते हैं इसलिये शब्दों के अवयव अक्षर भी अनादि हुए । पीछे से ऋषिओं ने दूसरे लोगों को समझाने के लिये उन अक्षरों को लिख कर दिखाने के लिये उनके चिह्न बनाए । उन्हीं चिह्नों को लोग उपचार से अक्षर कहते हैं इन्हीं अक्षरों को लिपि भी कहते हैं (इस ग्रंथ का पृ. ९-१० देखो) ।

राजा अशोक के खंभों में खोदे हुए अक्षरों से जो कि अंगरेजी राज में यूरोप के पंडितों की बड़ी कड़ी मेहनत से मिले और पढ़े गए, यूरोप के पंडितों का अनुमान है कि सब से पुरानी ब्राह्मी लिपि है जो कि अशोक के समय से भी पहले की है। बूलर साहब के अनुमान से यह ब्राह्मी ईसा के ३०० वर्ष पहले से हिंदुस्तान में प्रचलित थी।

पटने के मौर्यवंशवाले राजाओं के यहाँ भी इसी में लिखा पढ़ी होती थी।

बूलर साहब ने यह भी सिद्ध किया है कि यह ब्राह्मणों की बनाई है; इसकी जड़ सेमेटिक (Semitic) नहीं है।

इस लिपि के प्रचार होने के बाद पंजाब की ओर कुछ अरबी और कुछ ब्राह्मी के मेल से खरोष्ठी जिसे जैन लोग खरोट्टी कहते हैं, बनी। यह अरबी की चाल से दाहिनी ओर से बाई की ओर लिखी जाती थी। (See on the origin of the Indian Brahma Alphabet by G. Bühler, second revised editin of Indian studies, No. III, Strassburg. kohlj. Trübner. 1898)।

ज्ञान पड़ता है कि ब्राह्मणों ने निंदानुद्धि से अरबवालों को खर याने गदहा कहा है इस लिये उन गदहों के ओठ से जो शब्द निकलते थे वे जिस लिपि में लिखे जाय वह खरोष्ठी कहलाई। ब्राह्मण लोग गदहे और मुसलमान दोनों से दूर जाने में अपने को नापाक (अपवित्र) समझते हैं; कपड़े समेत स्नान करने से शुद्ध होते हैं। ब्राह्मणों ही के प्रभाव से खरोष्ठी दब गई और ब्राह्मी सब जगह फैली।

आदमी की खोपड़ी में जो माथे की ओर जोड़ के निशान हैं उन्हें हिंदू लोग ब्रह्मलिपि कहते हैं। संस्कृत के

बड़े बड़े पुराने ग्रंथों में लिखा है कि आदमी जन्म लेकर जो सुख या दुःख भोगते हैं सब उनके मस्तक के ऊपर ब्रह्माक्षर में लिखे रहते हैं। श्रीहर्ष ने अपने नैषधकाव्य के १ सर्ग के १९ श्लोक में लिखा है—

“अयं दरिद्रो भवितेति वैधर्सीं लिपिं ललाटेऽर्थिजनस्य जाग्रतीम्।

मृषा न चक्रेऽलिपतकल्पपादपः प्रणीय दारिद्र्यदरिद्रतां नृपः॥”

तुलसीदास ने भी रावण-अंगद के संवाद में अपने लंकाकांड में लिखा है—

“जरत बिलोकेउँ जवहि कपाला। विधि के लिखे अंक निजभाला।
नर के कर आपन बध बाँची। हँसेउँ जानि विधि-गिरा असाची॥”

इस लिये मुझे निश्चय है कि किसी महर्षि के हृदय में आदमी की खोपड़ी के जोड़ों के चिह्न देख कर उन्हीं के अनुसार अक्षर बनाने का विचार उत्पन्न हुआ और बना लेने पर ब्रह्मलिपि के समान होने से उस का नाम ‘ब्राह्मी लिपि’ रक्खा गया। ब्राह्मी लिपि बनाने से वह महर्षि इस संसार में सचमुच दूसरा ब्रह्मा ही हो गया जिस की कीर्ति सारे संसार में अचल हो कर फैली है।

अशोक के समय इस ब्राह्मी में बारह स्वरो के चिह्न थे जो कि व्यंजनों में मिलाए जाते थे। इसी से प्राकृत में बाराखड़ी (= बारह-अक्षरी = द्वादशाक्षरी) कही जाती है। इस ब्राह्मी में व्यंजनों के शिर पर कान के ऐसा बाई और दाहिनी ओर जो मात्रा लगाई जाती थी उसे प्राकृत में कन्न (कर्ण) कहते थे और दूसरी मात्रा जो खड़ी रेखा ऐसी लगाई जाती थी उसे मात्ता या मत्ता कहते थे।

ये बातें पुरानी पड़ गईं अब अक्षर और मात्राओं की सूरत भी बदल गई है तो भी गुरु लोगों से हम लोगों ने इस तरह से बाराखड़ी पढ़ी है—

क बिन कन्ने क । कन्नुन का । रेसोँ कि । दीर्गो की ।
ताड़े कु । बाड़े कू । एक मत के । दो ले कै । कन मत को ।
दुर्माती काना कौ । मस्ते कं । दासी कः ।

बिन कन्ने = बिना कर्णेन = कान के बिना । कन्नुन का = कर्णे-
न = कान के समेत, का । रेसोँ = ह्रस्व = छोटा । दीर्गो = दीर्घ = बड़ा ।
ताड़े = तले = नीचे । बाड़े = बार्धक्य = बड़ी (मात्रा से) । एक-
मत = एकमात्रया = एक मात्रा से । दो ले द्वे (मात्रे) आलाय = दो
मात्रा लेकर । कन मत = कर्णेन मात्रया च = एक कर्ण और एक
मात्रा से । दुर्माती काना = मात्राद्वयेन कर्णेन च = दो मात्रा और एक
कर्ण से । मस्ते = मस्तके = माथे के ऊपर (की बिंदु से) ।
दासी = दक्षिणे (अक्षरस्य) = दहिनी ओर (दो बिंदु रखने से) । इस
तरह सब संस्कृत शब्द के अपभ्रंश जान पड़ते हैं । बनारस की
ओर गुरु लोग अब तक इसी चाल से लडकों को मात्रा लगाने में
पढ़ाते हैं । पटना, दरभंगा, ... में बाराखडी पढ़ाने में
कुछ कुछ शब्दों में हेर फेर है पर सब की जड़ ऊपर लिखे हुए
संस्कृत के शब्द हैं ।

बनारस की ओर संस्कृत पढ़नेवाले लडके जिस दिन अ-
क्षरारंभ करते हैं उस दिन गुरु सब से पहले 'श्रीगणेशाय
नमः' लिखवाते और लडके से इसी का उच्चारण करना सिखाते ।
गुरुलोग वाल्मीकि रामायण का पहला श्लोक—

“मा निषाद प्रतिष्ठास्त्वमगमः शाश्वतीः समाः ।

यत्कौञ्चमिथुनादेकमवधीः काममोहितम् ॥

लडकों से कंठ कराते हैं ; जो लडका सब से पहले कंठ कर
सुना देता है उसे समझते हैं कि यह पढ़ाने से जल्द पंडित होगा ।

कहावत है कि जब व्यासजी महाभारत बनाने लगे उस
समय गणेश ही लिखने को तयार हुए इस लिये सब से भारी
लेखक समझ कर लडकों से सब से पहले उन्हीं का नाम लिख-

वाते हैं और उन्हीं की पूजा करवाते हैं ।

जो लडके चटशाले में गुरु के यहाँ हिंदी, कैथी, ...
सीखने जाते हैं गुरु सब से पहले उन से 'ओ ना मा सी धं'
लिखवाते हैं । यह बौड़ो की रीति आज तक चली जाती है ।
यह 'ॐ नमः सिद्धम्' का अपभ्रंश है । पतञ्जलि ने अपने
व्याकरण के महाभाष्य में भी लिखा है—

“माङ्गलिक आचार्यो महतः शास्त्रौघस्य

मङ्गलार्थं सिद्धशब्दमादितः प्रयुङ्क्ते ।”

“पश्यति त्वाचार्यो मङ्गलार्थश्च

सिद्धशब्द आदितः प्रयुक्तो भवति ।”

अब जहाँ जहाँ तहसीली स्कूल जारी हुए हैं वहाँ वहाँ
पुरानी रीति छूटती जाती है ।

मेरी समझ में यह ब्रह्मलिपि अशोक के हजारों वर्ष
पहले से हिंदुओं में प्रचलित थी और यह आदमी की खोपड़ी
के ब्रह्माक्षर से बनाई गई इसी लिये इसका नाम ब्राह्मी पड़ा ।
उस समय इसमें संस्कृत के ऋ, ॠ, लृ, ॠ भी रहे होंगे पर जैसे
आज कल हिंदी, कैथी, ... में व्यवहार न होने से ये छोड़ दिए
जाते हैं उसी तरह अशोक के समय प्राकृत में ये छोड़ दिए
गए । शारदातन्त्र में अक्षर देवता माने गए हैं, अक्षरों के
ध्यान भी लिखे हैं पर ध्यान और सूरत से कुछ भी मेल नहीं
मिलता ।

ब्राह्मी लिपि बनने के हजारों वर्ष पीछे अशोक के समय
की ब्राह्मी कैसे अपनी असली सूरत में रह सकती है । अशोक
ही के समय दश, बीस वर्ष आगे पीछे के खंभों पर जो ब्राह्मी
पाई गई है उसकी सूरतों में भेद पाए जाते हैं फिर हजारों वर्ष
का जहाँ बीच है वहाँ की क्या बात कही जाय ।

अशोक के समय की ब्राह्मी लिपि की वर्णमाला जो

अँगरेजी में भी ११-१९ बोलने में संस्कृत ही के ऐसा पहले एकाई तब दहाई आती है। १९ के बोलने में वेद की रीति ली गई है। संस्कृत में 'नवदश' को छोड़ कर ऊनविंशति लिया गया है।

२० के लिये संस्कृत और अँगरेजी में बोलने की एक ही चाल है जिस का 'दो दश' (Twenty) अर्थ है।

२१ = एकविंशति । २२ = द्वाविंशति । २३ = त्रयोविंशति ।
२४ = चतुर्विंशति । २५ = पञ्चविंशति । २६ = षड्विंशति ।
२७ = सप्तविंशति । २८ = अष्टविंशति । २९ = ऊनत्रिंशत् ।
३० = त्रिंशत् । यहाँ भी पहले एकाई तब दहाई बोलते हैं। वेद में २९ के लिये 'नवविंशति' आता है अँगरेजी में बोलने में इस से उलटी चाल है। ३० के बोलने में दोनों जगह 'तीन दश' (Thirty) एक चाल है।

३१ = एकत्रिंशत् । ३२ = द्वात्रिंशत् । ३३ = त्रयस्त्रिंशत् ।
३४ = चतुस्त्रिंशत् । ३५ = पञ्चत्रिंशत् । ३६ = षट्त्रिंशत् । ३७ = सप्त-
त्रिंशत् । ३८ = अष्टत्रिंशत् । ३९ = ऊनचत्वारिंशत् । ४० = चत्वा-
रिंशत् । ४१ = एकचत्वारिंशत् । ४२ = द्विचत्वारिंशत् । ४३ = त्रिच-
त्वारिंशत् । ४४ = चतुश्चत्वारिंशत् । ४५ = पञ्चचत्वारिंशत् । ४६ = ष-
ट्चत्वारिंशत् । ४७ = सप्तचत्वारिंशत् । ४८ = अष्टचत्वारिंशत् ।
४९ = ऊनपञ्चाशत् । ५० = पञ्चाशत् । ५१ = एकपञ्चाशत् ।
५२ = द्विपञ्चाशत् । ५३ = त्रिपञ्चाशत् । ५४ = चतुःपञ्चाशत् ।
५५ = पञ्चपञ्चाशत् । ५६ = षट्पञ्चाशत् । ५७ = सप्तपञ्चाशत् ।
५८ = अष्टपञ्चाशत् । ५९ = ऊनषष्टि । ६० = षष्टि । ६१ = एकषष्टि ।
६२ = द्वाषष्टि । ६३ = त्रिषष्टि । ६४ = चतुःषष्टि । ६५ = पञ्चषष्टि ।
६६ = षट्षष्टि । ६७ = सप्तषष्टि । ६८ = अष्टषष्टि । ६९ = ऊनसप्तति ।
७० = सप्तति । ७१ = एकसप्तति । ७२ = द्विसप्तति । ७३ = त्रिसप्तति ।
७४ = चतुःसप्तति । ७५ = पञ्चसप्तति । ७६ = षट्सप्तति । ७७ = सप्त-

सप्तति । ७८ = अष्टसप्तति । ७९ = ऊनाशीति । ८० = अशीति ।
८१ = एकाशीति । ८२ = द्वाशीति । ८३ = त्र्यशीति । ८४ = चतुर-
शीति । ८५ = पञ्चाशीति । ८६ = षडशीति । ८७ = सप्ताशीति ।
८८ = अष्टाशीति । ८९ = नवाशीति । ९० = नवति । ९१ = एक-
नवति । ९२ = द्विनवति । ९३ = त्रिनवति । ९४ = चतुर्नवति ।
९५ = पञ्चनवति । ९६ = षण्णवति । ९७ = सप्तनवति । ९८ = अष्ट-
नवति । नवनवति ।

पाणिनि के व्याकरण से ४९ = एकान्नपञ्चाशत् = एकोन-
पञ्चाशत् होता है। अँगरेजी में संस्कृत की बोली से उलटी चाल
है पर ३०, ४०, ५०, ६०, ७०, ८०, और ९० की बोली में
एक ही चाल है। दोनों जगह तीन दहाई, चार दहाई, ... नव दहाई
की चाल से शब्द बनाए गए हैं।

ऊपर लिखे हुए संस्कृत शब्द के अपभ्रंश प्राकृत के १,
२, ३, ... के शब्द हैं और फिर प्राकृत से बिगड़ कर आज कल
की हिंदी के १, २, ३, ... के शब्द प्रचलित हैं।

संस्कृत में १० को 'पंक्ति' भी कहते हैं पाणिनि के
व्याकरण से 'पंक्तिर्विंशतित्रिंशच्चत्वारिंशत्पञ्चाशत्षष्टिसप्तत्यशीतिनवति-
शतम् ५।१।५९' इस सूत्र से ये सब शब्द रूढ़ि याने स्थाय
सिद्ध हैं।

बोलने की चाल से लिखने की चाल उलटी ।

संस्कृत में दूसरे आर्यभट्ट की रीति छोड़ कर और पीछे
के सब ज्योतिषी संख्या बोलने की चाल से लिखने में उलटी
चाल चलते हैं। याने जैसे बोलने में 'द्वादश' में पहले दो तब दश
कहते हैं पर लिखने में पहले दहाई उसके बाद एकाई '१२' लिखते
हैं। इस तरह से दहनी ओर से बाईं ओर एकाई, दहाई, सैकड़ा, ...
के अंकों को लिख कर संख्या दिखलाना यह रीति वेदों में नहीं

पाई जाती। वेदों में सौ से ऊपर की संख्याएँ कई टुकड़े में लिखी गई हैं।

त्रिशता न शंकवोऽर्पिताः षष्टिर्न चलाचला सः (ऋ. सं. १, १६४, ४८) यहाँ ३६० संख्या ३०० और ६० दो टुकड़े में पढ़ी गई है।

याजुष ज्यौतिष वेदांग में ३६६ संख्या ३०० और ६६ दो टुकड़े में पढ़ी गई है। १८३० संख्या ३६६ और ५ के गुणन रूप में पढ़ी गई है (या. ज्यौ. श्लो. २८)।

सोमाकर भाष्य में जहाँ जहाँ गर्ग के वचन हैं सब जगह सौ से ऊपर की संख्याएँ दो दो टुकड़े में कही गई हैं—

‘त्रिंशच्चाष्टादशशती’ = $30 + 1400 = 1430$ । ‘चतुर्विंश शतात्मकम्’ = $24 + 100 = 124$ । ‘द्वाविंश शतं’ = $22 + 100 = 122$ । ‘अष्टादशशती षष्ठ्यधिका’ = $1800 + 60 = 1860$ । ‘द्वादश शतं’ = $12 + 100 = 112$ । ‘दशोत्तरे द्वे सहस्रे’ = $10 + 2000 = 2010$ संख्याएँ ली गई हैं (मेरा छपवाया सोमाकर भाष्य देखो)।

वाल्मीकिरामायण में—

‘दशवर्षसहस्राणि दशवर्षशतानि च’
= $10 \times 1000 + 10 \times 100 = 10000 + 1000 = 11000$ ।

महाभारत स्त्रीपर्व अध्याय २६ श्लो. ९—

‘दशायुतानामयुतं सहस्राणि च विंशतिः।

कोट्यः षष्टिश्च षट् चैव येऽस्मिन् राजन् मृधे हताः॥” इस में
 $10 \times 10000 + 10000 + 20 \times 1000 + 60 \times 10000000$
 $+ 6 \times 100000000 = 1000000 + 100000 + 200000$
 $+ 6000000000 + 600000000 = 660130000$ । इस तरह से ४ टुकड़े में संख्या लिखी गई है।

आर्यभटीय के गणितपाद श्लो. १०—

“चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्राणाम्” इस में
 62432 को $6 \times 104 + 62 \times 1000 = 624 + 62000 = 62432$, इस तरह से पढ़ा है।

“षष्ठ्यब्दानां षष्टिर्यदा व्यतीतास्त्रयश्च युगपादाः” इस में ३६०० इस संख्या को $60 \times 60 = 3600$ इस तरह से पढ़ा है पर भगणों में ‘रुघुघृ’, ... में पहले छोटी संख्या फिर उस से बड़ी संख्या, ... इस क्रम से पढ़ा है। यही रीति सिंहलियों में है पर उनके यहाँ ९९९९ इस से अधिक संख्या उन के बीस संकेतों से नहीं लिखी जा सकती। उनके यहाँ शून्य भी नहीं है।

मनुस्मृति में २४ को ‘व्यष्टवर्षोऽष्टवर्षां वा’ इस से 3×8 इस तरह से लिखा है।

भट्टोत्पल ने बृहत्संहिता की टीका में जो पुलिश और सूर्यसिद्धान्त के वचन लिखे हैं सब में एक, दश, शत, ... स्थानों के क्रम से संख्याएँ पढ़ी गई हैं। लल्ल, वराहमिहिर, ब्रह्मगुप्त, भट्टवलभद्र, ... सब आज कल की प्रसिद्ध रीति ‘अंकानां वामतो गतिः’ से अंक लिखते हैं।

दूसरे आर्यभट्ट ने अपने पाटीगणित अध्याय में ‘अंकानां वामतो गतिः’ इसी नियम से संख्याओं को लिखा है। (मेरा छपवाया महासिद्धान्त देखो)।

जैमिनिस्मृत में अक्षरों से संख्या ली गई है। पर सब आज कल की प्रसिद्ध वामगति ही से लिखी गई हैं।

बलभी राजा के ताम्रपत्र जो पाए गए हैं, जिन में खरोछी और ब्राह्मी के मिले-जुले अक्षर हैं। उन में जो शक काल की संख्याएँ हैं सब ‘अंकानां वामतो गतिः’ रीति से लिखी हैं। भेद इतना ही है कि शून्य के न होने से दश, बीस, ...

१००, २००, ... सब के लिये जुदे जुदे चिह्न बनाए गए थे पर छोटी संख्या की बाईँ और बड़ी संख्या लिखने की वही रीति थी जो कि आज कल 'अंकानां वामतो गतिः' यह प्रचलित है ।

शिलादित्य के १ ताम्रपत्र में २८६ शक = स. ३६४ ई.

२ " ३५६ श. = स. ४३४ ई.

धरसेन के २ " २७२ श. = स. ३५० ई.

४ " ३२६ श. = स. ४०४ ई.

(The Indian Antiquary. Feb. 2, 1872)

इन सब बातों से निश्चय होता है कि 'अंकानां वामतो गतिः' की चाल बहुत दिनों से प्रचलित थी पर शून्य और दहाई, सैकड़ा, ... के स्थानों पर से १-९ इतने ही चिन्हों से संख्या दिखाने की रीति ४२० शके के लगभग हिंदुओं में सब जगह फैली । उसी समय से शाका भी सब जगह अच्छी तरह से फैल गया । आर्यभट्ट ने अपने जन्मकाल को शके में नहीं लिखा पर उस समय शाका उन की ओर प्रसिद्ध हो गया था । आर्यभट्ट के पहले ही से दश, शत, ... स्थानों के नाम भी बन गए थे । आर्यभट्ट के 'स्वद्विनवके स्वरा नव' इस से मालूम होता है कि उन के समय के पहले ही शून्य बन गया था ।

दरपन में जो सामने प्रतिविम्ब देख पड़ता है उस का बायाँ भाग हमारे दहिने भाग की ओर रहता है उसी तरह हमारे सामने जमीन, पट्टे या कागज पर लिखी संख्या का बायाँ भाग हमारे दहिने भाग के सामने रहेगा, जैसे ३२५ में तीन की बाईँ ओर दो और दो की बाईँ ओर पाँच है ।

यह हिंदुस्तान विद्या में सब से श्रेष्ठ गिना जाता है उस में भी बनारस को सब से उत्तम विद्या-पीठ कहते हैं । बलराम और कृष्ण भी बनारस के पढ़े सान्दीपनि ऋषि से

पढ़े थे ।

यहाँ के लोग छोटी सीता को पहले और बड़े राम को पीछे मिला कर सीताराम बोलते हैं पर व्यवहार में राम की बाईँ ओर सीता को बैठते हैं । इसी तरह राधाकृष्ण, गौरीशंकर, ... में भी बात है ।

जैमिनिन्यायमालाविस्तर के आदि ही में माधवाचार्य ने लिखा है—

“राजसभायामेते तपस्विनः पूज्या विप्रा दक्षिणभाग उपवेशनीया एते च भृत्या वामभाग इति क्रमं करोति ।”

याने बड़े को दहिनी ओर और छोटे को बाईँ ओर बैठाना चाहिए ।

करोड़पति से बाईँ ओर लखपति, लखपति से बाईँ ओर हजारपति, ... इस क्रम से बैठाने में ही आदर समझा जाता है इस लिये करोड़ से बाईँ ओर लाख, लाख से बाईँ ओर हजार, ... के अंक रखे गए पर बोलने में सीताराम, राधाकृष्ण, गौरीशंकर, ... के ऐसा पहले एकाई फिर दहाई, ... बोलने लगे ।

मुनीश्वर ने भास्कराचार्य के गणिताध्याय के २८-२९ श्लोकों की टीका मरीचि में कृष्णदैवज्ञ का वचन लिखा है—

“अभ्यर्हितस्थानस्थस्य पङ्क्तौ पूर्वनिवेशस्तदधःस्थितस्थानस्थितानां सव्यक्रमेण स्थापनमुचितं लोकेषु तथा दृश्यते ।”

(मुनीश्वर और कृष्णदैवज्ञ के लिये गणकतरङ्गिणी देखो)

याने ऊँचे दर्जेवाले को पाँती में पहले बैठाना उन से छोटे को

१ अथा गुरुकुले वासमिच्छन्ताहुपजगमतुः ।

काश्यं सान्दीपनिं नाम ह्यवन्तिपुरवासिनम् ॥

(श्रीमद्भागवत दशमस्कन्ध, अध्या. ४४, श्लो. ११)

उन की बाईं ओर बैठाना यह लोगों के व्यवहार में भी देखा जाता है।

शून्य याने खाली की सूरत आकाश के ऐसी शून्य ० बनाई गई। क्योंकि संस्कृत में जितने आकाशवाची शब्द हैं सब से शून्य लिया जाता है। व्याकरण में 'शुनः संप्रसारणं वा च दीर्घत्वमिति यत्' इस से शून्य और शुन्य दोनों बनते हैं। अमरकोश में लिखा है 'शून्यं तु वशिकं तुच्छरिक्तं' याने शून्य खाली के अर्थ में है इसी लिये अरबवालों ने शून्य का तर्जुमा अरबी में सिफ्र (Sifr) या (Sifra) किया। यही सिफ्रा ल्याटिन में (Zephiram) हुआ। फिर 'जेफिरम्' से अंगरेजी में जीरो (Zero) या खास अरबी से (Cipher) हुआ।

बड़ी गिनतीओं के लिये एक एक दहाई की दोनों हाथों की अंगुलियों पर गिनने से दश दहाई का नाम सैकड़ा रखा गया क्योंकि ऐसा करने से बोलने में शब्द नहीं बढ़ता। दश दहाई की जगह सौ कहने में एक ही शब्द से काम चल जाता है। इसी तरह बार बार हाथों की दशों अंगुलियों पर गिनती करने से हर एक दहाई के जुदे जुदे, दश, बीस, ... नाम रखे गए।

पाणिनि की शिक्षा से साफ है कि महादेव जी ने अक्षरों को बनाया है (त्रिषष्टिर्वा चतुःषष्टिर्वर्णाः शम्भुमते मताः) और महादेव जी का बहुत कर के रहना बनारस ही में होता है इसी लिये बनारस को कैलासपुरी, विश्वनाथनगरी, आनन्दवन, काशी, महाश्मशान, ... बोलते हैं। व्यास जी भी अपनी बुढ़ौती में बनारस ही में आए। अगस्त्य जी बनारस ही में रहते थे, पीछे से देवताओं के बहुत विनय करने पर बाहर गए। गणेश जी काशी ही में वास करते हैं। बनारस ही को प्रधान समझ कर गौतम बुद्ध भी पहले यहीं आए।

संस्कृतविद्या के लिये बनारस प्रधानस्थान है। राम-कुण्ड के पढ़ाने के लिये काशी के पढ़े सान्दीपनि ऋषि ही को उग्रसेन, वसुदेव, ... सब यदुवंशियों ने उत्तम समझा। इन सब बातों से जान पड़ता है कि बनारस ही के किसी पंडित ने सब से पहले इस अंक-विद्या का प्रचार किया। फिर यहाँ से अरब के लोग इस विद्या को अपने देश ले गए और अच्छी रीति समझ कर हिंदुस्तान के आदर के लिये इन अंकों को हिंदीसा और इस की रीति को 'हिसाबे हिंद' कहने लगे।

पीछे से यूरोप के व्यापारी अरब से अपने देश में ले गए और इन अंकों को अरबिक-नोटेशन (Arbic Notation) (अरब लोगों के अंक चिन्ह) कहने लगे।

लिखने का स्थान।

पहले लोग जमीन पर धूर फैला कर उस पर गणित करते थे। जहाँ कहीं सूर्य सिद्धान्त, ... में देखो वहाँ भूमि ही पर हिसाब करना लिखा है। हिसाब को सब पुराने ग्रंथों में 'धूली-कर्म' लिखा है। भास्कराचार्य ने अपने ग्रहगणित-चन्द्रग्रहणाधिकार के ४ श्लोक की टीका में 'अत्र धूलीकर्मणा प्रत्यक्षप्रतीतिः'। भास्कर के ग्रंथ में कई जगह 'धूली-कर्म' आया है। भास्कर ने फलक के ऊपर भी गणित करना लिखा है इसी से उन्होंने अपने गोलाध्याय के यज्ञाधिकार में एक यज्ञ का नाम ही 'फलक-यज्ञ' लिखा है। फलक (पटरा या पटरी) पर धूर या अवीर फैला कर उस पर गणित करना यह हिंदुस्तान में बहुत पुराने समय से रीति प्रचलित है। भास्कराचार्य जमीन पर सेतखड़ी से लिखना इस की भी खबर देते हैं। परिलेख में वे लिखते हैं कि 'खटिकया रेखा उच्छाद्य' याने सेतखड़ी (दुधड़ी) से रेखाएँ खींच कर (किया

करो)। इस से साफ है कि पटरियों पर लोग दुग्धी से भी लिखते थे। बौद्धों के कटाह-जातक के आदि ही में एक सेठ के लडके की कहानी में पढ़ने के स्कूल, फलक, ... की चर्चा आई है। आल बेरुनी ने सन् १०३० ई. में हिंदुस्तान के स्कूलों के वर्णन में लिखा है कि स्कूलों में लडकों को काली पट्टी पर एक सफेद चीज से लिखते देखा (See *Al beruni's India by Dr E. C. Sochan, Vol. I, P. 182*)

पट्टे पर घालू, धूर या अबीर फैला कर उस पर हिमाचल करना यह रीति मेरे पढ़ने के समय तक बनारस संस्कृत कालेज में थी। पीछे से बापूदेवशास्त्री जी ने अँगरेजी स्लेट चलाई। अब आज कल काठ का लटकाऊ काला पट्टा या स्लेट प्रचलित है। बहुत कर के अब कागज पर पेन्सिल से हिसाब किया जाता है।

अरब के अंक।

पुराने अरब के लोग भी वर्णमाला के अक्षरों से संख्या दिखलाते थे। उनके यहाँ—

१=१ (अलिफ)। २=२ (बे)। ३=३ (जीम्)।
 ४=४ (दाल)। ५=५ (हे)। ६=६ (वाव्)। ७=७ (जे)।
 ८=८ (हह)। ९=९ (त)। १०=१० (जे)। २०=२० (केफ्)।
 ३०=३० (लाम्)। ४०=४० (मीम)। ५०=५० (नून्)।
 ६०=६० (सीन्)। ७०=७० (ऐन)। ८०=८० (फे)।
 ९०=९० (साद्)। १००=१०० (काफ)। २००=२०० (रे)।
 ३००=३०० (शीन्)। ४००=४०० (ते)। ५००=५०० (थे)।
 ६००=६०० (च)। ७००=७०० (ज़ाल)। ८००=८०० (ज़ाद)।
 ९००=९०० (थ)। १०००=१००० (गैन्)।

उन के यहाँ हजार से आगे फिर और संकेत न थे।

इन की संख्याएँ साबिअन लोगों से बहुत मिलती हैं खाली अक्षरों की सूरीयों में भेद है।

सन् ६२२ ई. में जब महम्मद मक्के से मदीने भाग गए उस समय सीमाहट देश के रहनेवालों ने जिन्हें पहले कोई नहीं जानता था, इस इतिहास के नाटक में एक अजब खेल खेलना आरंभ किया। जुदे जुदे जातिवाले सब आपस में मेल कर एक मजहब में हो कर मजहबी जोश में एक जात के हो गए। वे सब हाथों में तलवार लेकर चारों तरफ घूमने लगे, थोड़े ही दिनों में सीरिया और मेसोपोटामिया सब उन के अधीन हो गए। उन के प्रभाव से पर्शिया और हिंदुस्तान दोनों स्वारासन के राज में मिल गए। उत्तर-आफ्रिका और करीब करीब सब स्पेन भी इनके वश में हो गए पर पश्चिम यूरोप में चार्लस मार्टल के प्रभाव से सन् ७३२ ई. में वे लोग आगे बढ़ने से रोके गए।

उस समय मुसलमानों का राज हिंदुस्तान से स्पेन तक फैल गया था।

अंत में खलीफा होने के लिये आपस में बड़ा भारी झगडा खड़ा हुआ।

सन् ७५५ ई. में मुसलमानों के राज का दो हिस्सा हो गया। एक बगदाद में खलीफा हो कर बैठा और दूसरा काडोवा में जो कि स्पेन में है।

इस तरह अरबवालों का फैलना बड़े अचरज की बात है, इस से भी बढ कर अचरज यह है कि उन लोगों ने किस आसानी से अपनी घूमनेवाली जंगली चाल को छोड कर भली चाल को पकडा और बड़े बड़े पढ़े लिखे लोगों पर अपना राज जमाया। उन लोगों ने सब जीते हुए अपने देशों में अरबी भाषा का अच्छी तरह से प्रचार किया।

अवासिडेस के राज में पूरव की ओर विद्या-इतिहास का एक नया समय आरंभ हुआ।

बगदाद यूफ्राटस नदी के किनारे बसा है, यह हिंदुस्तान और ग्रीस के बीच में है; इस के पूरव की ओर हिंदुस्तान और पश्चिम ग्रीस है। इस लिये अरब के लोग ग्रीक और हिंदू दोनों से नई नई बातें सीखने लगे।

अरबवालों के भाग्य में था कि ग्रीस और हिंदुस्तान के राजा हों, उपद्रव के समय में वहाँ की विद्याओं को लोप होने से बचावें और फिर पीछे से उन विद्याओं को यूरपवालों को संपुर्ण कर दें।

अरबवालों ने गणितविद्या में बहुत कम तरकी की, जो बातें ग्रीस और हिंदुस्तान से सीख चुके थे उन पर से शायद एकाध नई बातों का पता लगाए हों। उन लोगों का मन विद्या की नई बातों पर नहीं लगता था; उन लोगों को सोचने की शक्ति कम थी, पर वे लोग व्यापार में बहुत होशियार थे। जिन जिन विद्या की बातों के विचार पर ग्रीक और हिंदू प्रसन्न हो जाते थे उन पर इन लोगों ने कुछ भी विचार न किए। ग्रीक के शंकुच्छिन्न (Conic Sections) और हिंदुस्तानियों के कुट्टक और वर्गप्रकृति पर इन लोगों का मन गया ही नहीं।

सन् १५६ हिजरी (स. ७७३ ई.) में दूसरे अब्बासिदी खलीफा अल्मन्सूर के राज में हिंदुस्तान का एक ज्यौतिषी बगदाद में गया और कहने लगा कि एक हिंदू राजकुअर के कहने से यह ग्रहों की एक सारणी बनाई गई है। अरब के पंडितों ने उस राजकुअर का नाम फिघर (Phighar) लिखा है।

जिस व्याघ्रमुख राजा के यहाँ ब्रह्मगुप्त रहते थे उसी के

वंश का कोई फिघर (व्याघ्र) रहा होगा, इसमें कुछ भी संशय नहीं, और जो ज्यौतिषी बगदाद में गया होगा वह ब्रह्मगुप्त के विद्यार्थियों में से कोई रहा होगा। बलख के ज्यौतिषी अबु-माशर की पोथी से साफ है कि ब्रह्मगुप्त के ग्रंथ में जो जो ग्रहों के चलने की गिनती है वही उस सारणी में भी है।

खलीफा अल्मन्सूर के कहने से महम्मद बिन हबराहिम अल्फज़ारी ने उस का अनुवाद अरबी में किया और उस का नाम सिंद-हिंद या हिंद-सिंद रक्खा।

उसी समय से याने स. ७७३ ई. से अरब में अच्छी तरह से हिंदुओं के अंक और संख्या लिखने की रीति फैली।

पच्छिमी अरब में इन अंकों को गुबार अंक (Gubar Numerals) कहते हैं। अरबी में गुबार धूर को कहते हैं। पहले लिख आए हैं कि हिंदुओं में पहले जमीन पर धूर फैला कर उस पर हिसाब करने की चाल थी। इस लिये जब हिंदुस्तान में अरब के लोगों ने धूर पर अंकों को देखा तो 'धूर पर के अंक' यह नाम ही रख दिया।

क्यांटर (Cantor) और ह्यांकल (Hankel) ने पुराने संस्कृत की २५७८ संख्या पर से आज कल की अँगरेजी २५७८ संख्या को इस तरह से दिखलाया है।

पुरानी संस्कृत में	८ ८ ५ ५ ५
कुछ बिगाड कर लिखने से	८ ५ ५ ८
पूरबी अरब में	८ ५ ५ ८
पच्छिमी अरब गुबार अंक	८ ५ ५ ८
ग्यारहवीं सदी में	८ ५ ५ ८
तेरहवीं सदी में	८ ५ ५ ८
सोरहवीं सदी में	८ ५ ५ ८

ब्रह्माक्षरो को देखो तो साफ साफ मालूम हो जायगा कि उन्हीं के द्वि, पञ्च, सप्त और अष्ट के पहले अक्षरो की बिगड़ी सूरत ही पुराने संस्कृत के २५७८ हैं ।

जरमेन में सन् १५०० ई. तक रोमन ही के अंक जो कि घड़ी में हैं चलते थे, पर सन् १४८२ ई. ही से हिंदुओं की संख्या लिखने की रीति भी जारी हो गई थी ।

ईशामसीह की सोरहवीं सदी से सारे शिक्षित देशों में हिंदुओं की संख्या लिखने की रीति अच्छी तरह से फैल गई ।

संस्कृत में स्थानों के नाम ।

यजुर्वेदसंहिता के १७वें अध्याय का दूसरा मंत्र—

“दश च दश च शतं च शतं च सहस्रं च सहस्रं चायुतं चायुतं नियुतं च नियुतं च प्रयुतं चार्बुदं च न्यर्बुदं च समुद्रश्च मध्यं चान्तश्च परार्धश्चैता मे अग्र इष्टका धेनवः सन्त्वमुत्रामुष्मिन् लोके ।”

इस में दश, शत, सहस्र, आयुत, नियुत, प्रयुत, अर्बुद, न्यर्बुद, समुद्र, मध्य, अंत, परार्ध, इतने स्थानों के नाम आते हैं ।

इस के भाष्य वेददीप में महीधर लिखते हैं—

“शतं दशगुणितं सहस्रं भवति सहस्रं दशगुणितमयुतं भवति आयुतं दशगुणितं नियुतं भवति नियुतं लक्षम् नियुतं दशगुणितं प्रयुतं भवति प्रयुतं लक्षदशकं प्रयुतग्रहणं कोटिरुपलक्षकम् प्रयुतं दशगुणं कोटिः कोटिर्दशगुणा अर्बुदम् अर्बुदं दशगुणं न्यर्बुदम् न्यर्बुददशब्देनावजसंख्या ज्ञेया एतेषां ग्रहणमवजसमुद्रान्तर्वर्तिनीनां सर्वनिर्खर्वमहापद्मशङ्कुसंज्ञानां संख्यानामुपलक्षकम् ।”

इस में कोटि, खर्व, निखर्व, महापद्म, शङ्कु, इतने अधिक हैं । महीधर भास्कर से पीछे हुए हैं इसलिये उन की लीलावती से निकाल कर इतने अधिक लिख दिए हैं ।

अथर्व संहिता के पाँचवें कांड के ४ अनुवाक के १५-१६

सूत्रों में १-११, और २०, ३०, ४०, ५०, ६०, ७०, ८०, ९०, १००, १००० संख्याओं के शब्द आते हैं ।

इसी तरह ऋग्वेद में भी १०, १००, १०००, ... के शब्द आते हैं ।

वाल्मीकिरामायण-किष्किंघाकांड के ३८ सर्ग ३०-३१ श्लो.

“शतैः शतसहस्रैश्च वर्तन्ते कोटिभिस्तथा ।

अयुतैश्चावृता वीर शङ्कुभिश्च परंतप ॥

अर्बुदैरर्बुदशतैर्मध्यैश्चान्त्यैश्च वानराः ।

समुद्राश्च परार्धाश्च हरयो हरियूथपाः ॥

३९ वे सर्ग का २९ श्लो.

“ततः पद्मसहस्रेण वृतः शङ्कुशतेन च ।

युवराजोऽङ्गदः प्राप्तः पितुस्तुल्यपराक्रमः ॥”

और ४८ वे सर्ग का १२ श्लो.

“महर्षिः परमामर्षी नियमैर्दुःप्रघर्षणः ।

तस्य तस्मिन् वने पुत्रो वालको दशवार्षिकः ॥”

१ बनारस संस्कृत कालेज के पुस्तकालय में तेरियट (बजरवट्ट) के पत्ते पर बंग-अक्षर में लिखी पोथी जो अनुमान से ४०० वर्ष से अधिक पुरानी है उस में ऐसा पाठ है ।

शतैः शतसहस्रैश्च कोटिभिश्चायुतैरपि ।

प्रयुतैश्चामिष्यन्ति शङ्कुभिश्च परन्तप ॥

अर्बुदैरर्बुदशतैर्मध्यैश्चान्त्यैश्च वानराः ।

सामुद्राश्च परार्धैश्च हरयः सह यूथपैः ॥

ततः पद्मसहस्रेण वृतः शङ्कुशतेन च ।

युवराजोऽङ्गदः प्राप्तः पित्रा तुल्यपराक्रमः ॥

महर्षिः परमामर्षी नियमे दुष्प्रघर्षणः ।

तस्य तस्मिन् वने पुत्रो वानरो दशवार्षिकः ॥

इस में शङ्कु के स्थान में ‘शङ्कु’ पाठ है । मुझे भी यह पाठ ठीक मालूम होता है । बौद्धों के समय से ‘शङ्कु’ यह नाम मिलाया गया है ।

इन श्लोको से वाल्मीकि ने दश, शत, सहस्र, अयुत, कोटि, शङ्कु, अर्बुद, मध्य, अन्त्य, समुद्र, परार्ध, पद्म, शंख, इतने स्थान कहे हैं ।

शक ४२० (स. ४९८ ई.) में आर्यभट्ट ने आर्यभटीय के गणितपाद में—

“एकं दश च शतं च सहस्रमयुतानियुते तथा प्रयुतम् ।

कोट्यर्बुदं च वृन्दं स्थानात् स्थानं दशगुणं स्यात् ॥”

इस में एक, दश, शत, सहस्र, अयुत, नियुत, प्रयुत, कोटि, अर्बुद, इतने स्थान के नाम आते हैं ॥ इस श्लोक में बहुत लोगों का मत है कि ‘कोट्यर्बुदं च वृन्दं’ यह अशुद्ध पाठ है ‘वृन्दं’ यहाँ पर व्यर्थ होता है इस लिये शुद्ध पाठ ‘कोट्यर्बुदमरविन्दं’ यह है । बहुतों का मत है कि ‘वृन्द’ यह यहाँ पर कमल—(अरविन्द = पद्म) वाची है । जो हो पर दोनों मत से एक स्थान और पद्म आता है पर मेरी समझ में ‘वृन्द’ से और बहुत स्थान हैं यह आर्यभट्ट ने जनाया है क्योंकि ‘खद्विनवके खरा नव’ इस में द्विनवके से अठारह स्थान लिया है जो कि आज तक संस्कृत के अंकगणित में प्रसिद्ध हैं ।

इस आर्या के प्रथमचरण के अंत का ‘च’ छंदोग्रंथ की शीति से दीर्घ गिना जायगा । इस बात को न जान कर डा. कर्न ने इस में व्यर्थ छंदोभंग दोष दिखलाया है । (See His edition of *Aryabhatiya*, 1874) आर्यभट्ट ने नियुत से लक्ष लिया है । अमरकोश में भी लिखा है कि ‘वा लक्षा नियुतं च तत् ।’

रत्नकोश में भी आर्यभट्ट ही के स्थान लिखे हैं—

“शतं सहस्रमयुतं नियुतं प्रयुतं तथा ।

स्त्री कोटिरर्बुदमिति क्रमाद्दशगुणोत्तरम् ॥”

दुर्गा (सप्तशती) के दूसरे अध्याय के ४१ वे श्लोक की

टीका में नागेश ने ब्रह्माण्डपुराण का वचन लिखा है—

“एकं दश शतं चैव सहस्रमयुतं तथा ।

लक्षं च प्रयुतं चैव कोटिरर्बुदमेव च ॥

अब्जं सर्वो निखर्वश्च शंखपद्मौ च सागरः ।

अन्त्यं मध्यं परार्धं च दशवृद्ध्या यथाक्रमम् ॥”

इस में शङ्कु छूट गया है उस के स्थान में शङ्ख आया है और अंत के पद्म से महापद्म लिया है ऐसा जान पड़ता है ।

श्रीधर ने त्रिशतिका में—

एकं दश शतमस्मात् सहस्रमयुतं ततः परं लक्षम् ।

प्रयुतं कोटिमथार्बुदमब्जं सर्वं निखर्वं च ॥

तस्मान्महासरोजं शङ्कुं सरितां पतिं ततस्त्वन्त्यम् ।

मध्यं परार्धमाहुर्धोत्तरं दशगुणाः संज्ञाः ॥

इस में एक, दश, शत, सहस्र, अयुत, लक्ष, प्रयुत, कोटि, अर्बुद, अब्ज (कमल), सर्व, निखर्व, महासरोज (महापद्म), शङ्कु, सरितां पति (समुद्र), अन्त्य, मध्य, परार्ध, इतने स्थान हैं, इन्हीं को भास्कराचार्य ने भी अपनी लीलावती में पढा है ।

लल्ल, ब्रह्मगुप्त, बटेश्वर, भट्ट बलभद्र, श्रीपति, ... के अंकगणित नहीं मिलते पर परंपरा से निश्चय होता है कि उन में भी क्रम से स्थानों के नाम श्रीधर ही के लिखे होंगे ।

सब से अंत का और सब से बड़ा स्थान ‘परार्ध’ है इस में संशय नहीं । श्रीहर्ष ने भी नैषध के ३ सर्ग, ४० श्लो.

“यदि त्रिलोकी गणनापरा स्यात् तस्याः समार्थिर्द्यदि नायुषः स्यात् ।

पारे परार्धं गणितं यदि स्यात् गणयनिःशेषगुणोऽपि स स्यात् ॥”

इस में परार्ध ही को सब से बड़ा माना है ।

संस्कृत के ग्रंथों में नवनिधिओं के नाम—

“महापद्मश्च पद्मश्च शंखो मकरकच्छपौ ।

मुकुन्दकुन्दनीलाश्च खर्वश्च निधयो नव ॥” (अमरकोश, सर्ग वर्ग)

है। पीछे से लोगों ने एक स्थान और बढ़ा कर १९ स्थान किए।

दश या दहाई।

संस्कृत में धन का देवता कुबेर माने गए हैं। कुबेर का स्थान कैलास (के जले लसति शोभते इति कैलासः) याने पानी में है। यह पहले लंका में भी रहते थे; अपने छोटे भाई रावण के डर से लंका से भाग गए।

पानी में रहने के कारण सब पानी के पदार्थों के मालिक हुए। इन की नवनिधि महापद्म (बड़ा कमल), पद्म (कमल) शंख (प्रसिद्ध समुद्र का एक जानवर), मकर (प्रसिद्ध पानी का एक जानवर, मगर), कच्छप (प्रसिद्ध पानी का एक जानवर, कछुआ), मुकुंद (एक फूल), कुंद (माघ महीने का एक फूल), नील (नीला कमल), खर्ब (छोटा कमल), ये सब पानी ही के पदार्थ हैं।

जौ विचार कर देखो तो व्यापार का मूल धन ही है इस लिये व्यवहार चलाने के लिये लोगों ने कुबेर को धन-पति समझ कर उन की नवनिधियों ही में से पानी के एक एक पदार्थ को लेकर अंकों के स्थानों में रख दिए।

पानी की एक खुशबूदार घास जिसे आज कल लोग पानी का मोथा या नागर मोथा कहते हैं उसी घास की जड़ को, जो कसेरू ऐसी होती है, जिस स्थान में रख दिया उस का नाम उस घास के छोटे नाम 'दशपूर' के 'दश' से प्रसिद्ध हुआ। (दशपूरं दशपुरं प्लवनं जीविताह्वयम्-इति वाचस्पतिः)।

लोग बड़ा नाम न लेकर इस को 'दश' पुकारने लगे जो कि आज कल हिंदी में 'दहाई' नाम से मशहूर है।

जौ इस घास की जड़ की सूरत ० ऐसी मानो तो ० = १०, ०० = २०, ००० = ३०,। या दंशि (दंशने) धातु से दश-न्ति-इति दश (जो काटे वह दश) इस अर्थ से दोनों पंजों

की अँगुलियों को मिला कर दहाई की जगह ऽ ऐसी सूरत बनाते रहे हों जैसा कि एजिप्ट के लोग दश की जगह रखते थे।

शत या सैकड़ा।

इस स्थान की जगह पहले लोग बाँस के टुकड़े को रखते थे फिर जब इस बाँस का नाम संस्कृत में शतपर्वा (शतपर्वा यव-फलो वेणुमस्करतेजनाः अम. को. २ कां. ४ व १६१ श्लो.) पड़ा तब इस का छोटा नाम 'शत' ले लिया गया। मान लो कि एक टुकड़े की सूरत 1 ऐसी है तो

1 = १००, 11 = २००, ... 1111111111 = ९०० ऐसा होगा।

सहस्र या हजार।

जान पड़ता है कि इस स्थान में पहले लोग दूब (दूर्वा) को रख देते थे फिर पीछे जब संस्कृत में दूब का नाम सहस्रवीर्या (सहस्रवीर्याभार्गव्यौ अ. को. २ कां., ४ व, १५८ श्लो.) पड़ा तब लोग इस स्थान को 'सहस्र' कहने लगे। मान लीजिए इस की सूरत 1111111111 ऐसी है तो

1111111111 = १०००, 11111111111111111111 = २०००, ऐसा होगा।

अयुत, लक्ष (नियुत) और प्रयुत।

संस्कृत में लाक्षा या लक्षा लाह को, जो लाही से पैदा होता है, कहते हैं। भानुदीक्षित अमरकोश की टीका में लिखते हैं कि लक्ष्यते इति लक्षा, लक्ष (आलोचने) धातु से घञ् प्रत्यय कर फिर पृषोदरादित्वात् से लाक्षा बना। लक्ष 'निशाना' के अर्थ में भी है। इन सभी से जान पड़ता है कि लक्ष लाह और दूसरे रंग के मेल से एक तरह की गड़ेली है जिसे यु (मिश्रणे) धातु से क्त प्रत्यय कर और नि प्रत्यय लगा कर नियुत (कई रंग का मेल) भी कह सकते हो।

यह गोली जब एक ही रंग की हो याने बेमेल हो तो उसे 'अयुत' और नियुत से भी ज्यादा रंग के मेल की हो तो उसे प्रयुत कह सकते हैं।

इस लिये बेमेल याने खाली लाल रंग की गोली 'अयुत' दो रंग के मेल की गोली 'नियुत' और तीन चार रंग के मेल की गोली 'प्रयुत' नाम से मशहूर हुई। या एक रंग, दो रंग और तीन चार रंग की कौड़ियाँ उन नामों से मशहूर हुई हो। अयुत-गोली को ला_१, लक्ष-गोली को ला_२ और प्रयुत-गोली को ला_३ कहो तो

$$\text{ला}_1 = 10000, \quad \text{ला}_1 \text{ला}_1 = 20000, \dots$$

$$\text{ला}_2 = 100000, \quad \text{ला}_2 \text{ला}_2 = 200000, \dots$$

$$\text{ला}_3 = 1000000, \quad \text{ला}_3 \text{ला}_3 = 2000000, \dots \text{ऐसा होगा।}$$

दक्षिण देशों में अब तक गणित करने में अंकों के स्थानों में कहीं कहीं कौड़ियाँ प्रचलित हैं। वे लोग कई एक जुदी जुदी सूरत की कौड़ियों को जुदे जुदे स्थानों में रख लेते हैं। इस से अनुमान होता है कि पुराने लोगोंने अयुत, लक्ष, (नियुत) और प्रयुत स्थानों में समुद्र की बहुत दिन तक ठहरनेवाली चीज समझ कर जुदे जुदे रंग की कौड़ियों को रख लिए थे।

अब भी जुआरी लोग जुदी जुदी सूरत की अपनी अपनी कौड़ी रख कर जुआ खेला करते हैं।

कोटि या करोड।

समुद्र के पास एक ब्राह्मी लता या घास होती है। इस का संस्कृत नाम कोटिवर्षा है। इस के रस में मधु (शहद) ऐसा स्वाद होता है इसी लिये भानुदीक्षित ने अपनी अमरकोश की टीका में इस की व्युत्पत्ति की है 'कोटिभिरभ्रैर्वर्षति

मधु या सा कोटिवर्षा' याने अपने किनारों से जो शहद बरसावे वही 'कोटिवर्षा' है। यह लंका में बहुत बोई जाती है इसी लिये इस का दूसरा नाम 'लंकोपिका' (लंका में जो बोई जाय) है।

पुराने लोगों ने जिस स्थान में इस की जड़ को रख लिया उसे इस के छोटे नाम 'कोटि' से पुकारने लगे। इस के जड़ की सूरत मान लो कि 0 ऐसी है तो $0 = 10^\circ$, $00 = 2 \times 10^\circ, \dots$ ऐसा होगा।

अर्बुद।

अर्बुद मांस के कील को कहते हैं। मेदिनीकोश में लिखा है—

"अर्बुदो मांसकीलेऽस्त्री परुषे दशकोटिषु। महीधरविशेषे ना...।"

मांस-कील से किसी समुद्र के जानवर की हड्डी जान पड़ती है। जैसे गोमतीचक्र, सीपी, मूंगा, ... समुद्र के जानवरों की हड्डी पवित्र समझी जाती है उसी तरह यह भी किसी जानवर की हड्डी पवित्र समझी गई होगी। यह जिस स्थान पर रक्खी गई वह अर्बुद नाम से मशहूर हुआ। इस की सूरत जैसी ऐसी हो तो

$$\square = 10^\circ, \quad \square\square = 2 \times 10^\circ, \dots \text{ऐसा होगा।}$$

अब्ज (पद्म, कमल), खर्व (छोटा कमल), निखर्व (कुछ बड़ा कमल) और महापद्म (सब से बड़ा कमल)।

पद्म से साधारण कमल याने कमल का बीज लिया गया है। इस के आगे तीसरा नाम 'महापद्म' बड़ा भारी कमल याने बड़े भारी कमल का बीज है, इस लिये कमल और महाकमल के बीच के खर्व और निखर्व से खर्व-कमल (छोटा कमल) और निखर्व-कमल (कुछ बड़ा कमल) लिया गया है।

जल्दी से बोलने के लिये आधे नाम खर्व और निखर्व ले

लिए गए हैं।

कमल की बहुत जाति हैं। इन की बीए से माला बनती है। इस बीए की माला को कमलाक्ष कहते हैं। संस्कृत में खर्व छोटे को कहते हैं।

अमरकोश में लिखा है कि 'खर्वों ह्रस्वश्च वामनः'। जैसे 'युत' में 'नि'-उपसर्ग से नियुत बना है उसी तरह खर्व में नि-उपसर्ग लगाने से निखर्व बना है। धातुओं में उपसर्ग लगाने से धातुओं का अर्थ बदल जाता है, इसी लिये दीक्षित ने सिद्धान्तकौमुदी में लिखा है—

“उपसर्गेण धात्वर्थो बलादन्यत्र नीयते।

प्रहाराहारसंहारविहारपरिहारवत् ॥”

इन सब बातों से साफ साफ मालूम होता है कि पद्म, खर्व, निखर्व और महापद्म इन से चार तरह के कमलों के चार तरह के बीज लिए गए हैं।

ये बीज जिन स्थानों में रक्खे गए उन के नाम भी इन्हीं नामों से मशहूर हुए।

इन बीजों को जौ प_१, प_२, प_३, प_४ कहो तो

$$प_१ = १०^१, प_१प_१ = २ \times १०^१, \dots$$

$$प_२ = १०^{१०}, प_२प_२ = २ \times १०^{१०}, \dots$$

$$प_३ = १०^{११}, प_३प_३ = २ \times १०^{११}, \dots$$

$$प_४ = १०^{१२}, प_४प_४ = २ \times १०^{१२}, \dots$$

ऐसा होगा।

शंकु।

शंकु पानी का एक जानवर है। अमरकोश में लिखा है—

“तिर्मिगिलादयश्चाथ यादांसि जलजन्तवः।

तद्भेदाः शिशुमारोद्रशङ्खवो मकरादयः ॥”

इस की हड्डी जिस स्थान में रखते थे उस स्थान को लोग शंकु कहने लगे। इस हड्डी की सूरत मानो कि ॥ ऐसी है तो ॥ = $१०^{१३}$, ॥ ॥ = २×१०^{१३} , ...

जलधि (समुद्र) अंत्य, मध्य और परार्ध।

समुद्र में सभी रत्न रहते हैं; इस का नाम ही रत्नाकर है, इस लिये शंकु के दशगुने को लोगो ने समुद्र याने सागर, इस से दशगुने को अंत्य याने सागर का अंत्य (महासागर का आदि), इस के दशगुने को मध्य (महासागर का मध्य) और इस के दशगुने को परार्ध (महासागर का मध्य के बाद दूसरा हिस्सा) कहा।

समुद्र की सूरत □, अंत्य की सूरत □—, मध्य की सूरत □—□, और परार्ध की सूरत □—□—□ ऐसी मानें तो

$$\square = १०^{१४}, \square\square = २ \times १०^{१४}, \dots$$

$$\square\square\square = १०^{१५}, \square\square\square\square = २ \times १०^{१५}, \dots$$

$$\square\square\square\square\square = १०^{१६}, \square\square\square\square\square\square = २ \times १०^{१६}, \dots$$

$$\square\square\square\square\square\square\square = १०^{१७}, \square\square\square\square\square\square\square\square = २ \times १०^{१७}, \dots$$

ऐसा होगा।

इस तरह नामों के ऊपर ध्यान देने से साफ साफ मालूम देता है कि दश, शत, ... स्थानों को समझने के लिये पुराने हिंदुओं ने जुदे जुदे पानी के पदार्थों को रख लिया (जैसा कि एजिप्ट के लोग पानी के रहनेवाले हंसों के मुँहों को रक्खा। दोनों में भेद इतना है कि हिंदुओं ने खास उन चीजों के टुकड़े, हड्डी, जड और बीए ले लिए और एजिप्ट के लोगो ने खास चीज को न लेकर उन की सूरत बना ली)। फिर पीछे से संख्या की लिखने की रीति जारी होने पर उन्हीं पदार्थों के नाम से वे स्थान बोले जाने लगे। संभव है कि शतरंज

के मोहरे ऐसे कमल वगैरह की काठ की सूरत बना ली गई हो जिन्हें हिंदी में गोटी भी कहते हैं।

वे लोग समुद्र वगैरह की जगह क्या रखते थे इस का पता लगाना अब असंभव है क्योंकि जमीन पर कमलगट्टा, गोली, कौड़ी, बाँस के टुकड़े, हड्डी ... से जो हिसाब किए जाते थे वे थोड़े समय तक जमीन पर रह सकते हैं। एजिप्ट के ऐसा अगर पत्थर पर उन की सूरत खोदी गई होती तो संभव था कि आज चार पाँच हजार वर्ष बीतने पर भी वे मौजूद रहते जैसा कि एजिप्ट में अब तक बहुत स्थानों पर खोदे हुए अंक मौजूद हैं।

अर्व (अरब)।

बौद्धों के समय से संख्या के एक स्थान का नाम अर्व भी आया है। बहुत लोगों ने अर्वुद का अपभ्रंश अर्व माना है, पर मेरी समझ में उन लोगों ने अर्व से दरयाई घोड़ा लिया है। संस्कृत में 'अर्वा' घोड़े को कहते हैं। अमरकोश में लिखा है 'वाजिवाहर्वगन्धर्वहयसैन्धवसप्तयः।' (ऋगतौ धातु से वनिष् प्रत्यय करने से अर्वन् बनता है)।

शंख और नील।

शंख समुद्र का प्रसिद्ध एक जानवर है, इस की सूखी हड्डी भी शंख ही के नाम से प्रसिद्ध है, हिंदुओं में यह बहुत पवित्र समझी जाती है, लोग भगवान की पूजा में इस को बजाते हैं।

नील से नीलकमल का बीज लिया गया है। स्थानों के नामों में, हीरा, पन्ना, पोखराज, ... रत्नों के नाम नहीं आए हैं इस लिये नील से जान पड़ता है कि, 'नीलम' नहीं लिया गया है।

अंकों का जोड़ना और घटाना।

जिस रीति से कई एक संख्याओं को एकट्ठा करते हैं याने जोड़ते हैं उस का संस्कृत में प्रधान नाम संकलित या संकलन है पर कहीं कहीं योग और युक्ति भी नाम आते हैं। संकलन या संकलित कल (शब्दसंख्यानयोः) धातु से बना है जिस का सं उपसर्ग लगाने से अच्छी तरह गिनती करना याने संख्याओं को एकट्ठा करना है।

जब संख्याओं के स्थान बन गए तो एक एक स्थान के अंकों को एकट्ठा कर लेना और उन में से बड़े स्थान के अंकों को अलग कर उन्हें बड़े स्थानवाले अंकों में मिलाते जाना और अंत में जोड़ जान लेना यह काम कुछ कठिन नहीं है, पर व्यवहार में इस काम को लोग कैसे करते थे यह बात किसी संस्कृत-गणित की पोथियों में नहीं है। जहाँ कहीं जोड़ने या घटाने की रीति लिखी है वहाँ पर इतना ही लिखा है कि क्रम से याने एकई, दहाई, ... या उत्क्रम से याने पहले सब से बड़े स्थान के अंकों को फिर उस से उतरे हुए याने छोटे स्थान के अंकों को योग में मिलाते और घटाने में घटाते जाओ।

दूसरे आर्यभट ने अपने महासिद्धान्त में —

“संख्यावतां बहूनामेकीकरणं तदेव संकलितम्।

यदपास्तं सर्वधनात् तद्व्यवकलितं तु शेषकं शेषम् ॥”

भास्कराचार्य ने भी अपनी लीलावती में लिखा है—

“कार्यः क्रमादुत्क्रमतोऽथवाङ्कयोगो यथास्थानकमन्तरं वा।”

पर इतना कहने से किसी के मन में यह बात नहीं आसकती कि क्रिया कैसे करना। इसी लिये गणित, वैद्यक, संगीत और शस्त्र चलाने और बनाने की विद्या में लोग कहा करते हैं कि इन संकेतविद्याओं में कीली रहती है उस का भेद गुरु के

विना नहीं खुलता ।

हम लोग गुरु-परंपरा से इस क्रिया को जैसे करते हैं उस का एक उदाहरण दिखाते हैं ।

मान लो कि ३२५, १७८५, ९५२, २५ को जोड़ना है तो जमीन या पट्टे पर धूर फैला कर एक एक स्थानों के नीचे अंकों को लिखने से—

$\left. \begin{array}{r} 325 \\ 1785 \\ 952 \\ 25 \end{array} \right\}$ ऐसा हुआ । अब क्रमरीति से पहले एकाई के

अंकों को जोड़ कर १७ के ७ को ऊपर की पाँती के पाँच को मिटाकर उस की जगह ७ लिखते हैं और हाथ आए एक ऐसा बोलते हैं । फिर इस एक को दहाई के अंकों के साथ जोड़ते हैं । यहाँ पर यह जोड़ १८ होते हैं । ऊपर की पाँती की दहाई दो मार कर याने मिटा कर दहाई के जोड़ १८ के आठ को लिखते हैं और हाथ आए एक कहते हैं । फिर इस एक को सैकड़ेवाले अंकों के साथ जोड़ते हैं । यहाँ पर यह जोड़ २० होता है । ऊपर की पाँती के सैकड़ेवाले अंक तीन को मार कर उस की जगह सैकड़े के योग २० के शून्य को लिखते हैं और हाथ आए दो ऐसा बोलते हैं । इस हाथ आए दो को फिर हजार-स्थानवाले अंकों के साथ जोड़ते हैं । यहाँ पर यह जोड़ तीन होता है इसे ऊपर की पाँतीवाले अंकों के साथ हजार के स्थान पर लिख देने से योग = ३०८७ हुआ ।

इसी रीति से सदा योग के अंकों को ऊपर की पाँती में लिखते हैं ।

उत्क्रमरीति में पहले सब से बड़े स्थान के अंकों को जोड़ कर ऊपर की पाँती में पहले अंक को मार कर उस की जगह लिखते हैं । जैसे यहाँ ऊपर की पाँती में पहले हजार का एक रक्खा जायगा, फिर सैकड़े के अंकों के योग १९ के नव को

तो ऊपर की पाँती के तीन को मार कर उस की जगह लिखेंगे और हाथ आए एक को ऊपर की पाँती में हजार के अंक एक में मिला कर दो को एक को मार उस की जगह रक्खेंगे । इसी तरह आगे भी करते जायेंगे । इस उत्क्रम-क्रिया में ऊपर की पाँती के अंक कई बार मारने पड़ते हैं इस लिये संस्कृत के ज्यौतिषी (गणक) व्यवहार में सदा क्रम-क्रिया से योग करते हैं ।

अब आज कल बहुत लोग निचली पाँती के नीचे एक ति-रछी रेखा कर उस के नीचे योग के अंकों को लिखते हैं जैसा कि स्कूलों के लड़के लिखते हैं ।

संस्कृत के गणक कागज पर जोड़ना नहीं कर सकते क्योंकि उन लोगों को ऊपर की पाँती के अंकों को मारना और उन की जगह नए अंकों को लिखना पड़ता है ।

हाथ आए एक, दो, ... यह परंपरा से जो बोली चली आती है उस से साफ साफ जाहिर है कि दहाई, सैकड़ा, हजार, ... स्थानों के लिये पुराने लोगों ने जो अपने पास बहुत घास की जड़, बाँस के टुकड़े, ... हिसाब के लिये रख लेते थे उन में से जोड़ में जिस की जितनी जरूरत पड़ती थी उतने हाथ में ले लिए जाते थे । जैसा ऊपर के उदाहरण में एकाई के अंकों के योग १७ में ७ को तो एकाई की जगह में रख लिया और एक दहाई के लिये नागरमोथे की एक जड़ हाथ में ले ली । फिर इस जड़ को और दहाई की जड़ों में मिला देने से जो १८ जड़ें हुईं उन में से ८ तो दहाई की जगह रख ली गईं और दश जड़ों को अलग रख उन के स्थान में एक बाँस का टुकड़ा हाथ में ले लिया गया ।

मेरी समझ में पुरानी चाल उठ जाने पर भी पुरानी बोली नहीं उठी । सब जगह 'हाथ आए या हाथ लगे' प्रचलित है ।

तुलसीदास ने भी अपनी दोहावली में लिखा है—

“तुलसी-पति रति अंक सम सकल साधना सून ।

अंक-रहित कछु हाथ नहिँ अंक-सहित दस-गुन ॥”

घटाने के लिये क्रम-रीति और उत्क्रम-रीति दोनों लिखी हैं, पर संस्कृत के गणक उत्क्रमरीति ही से घटाते हैं । वे लोग इस रीति से घटाते हैं—

मान लो कि १२७८१ में ९६८३ को घटाना है तो जिस में घटाना है उस ‘वियोज्य’ को उपर और जिसे घटाना है उस ‘वियोजक’ को यथास्थान नीचे रखने से

१२७८१ } ऐसा हुआ । अब उत्क्रम-रीति में बड़े स्थान ९६८३ }

से घटाने में ऐसा बोलते हैं— दो में नव नहीं घटता (जाता) इस लिये एक को किया शून्य आए दश, दश और दो बारह, बारह में गए नव रहे तीन, (१२ को मार कर इस की जगह तीन रखते हैं) । सात में गए छ रहा एक (७ को मार कर इस की जगह एक रखते हैं) । आठ में गए आठ रहा शून्य (ऊपर के आठ को मार कर इस की जगह शून्य रखते हैं) । एक में तीन नहीं घटता (जाता) इस लिये ऊपर के सैकड़े के एक को किया शून्य और शून्य को किया नव आए दश, दश और एक ग्यारह, ग्यारह में गए तीन रहे आठ । ऐसा करने से बाकी (शेष) = ३०९८ ।

इस तरह ऊपर के अंक में जब नीचे का अंक नहीं घटता तब उस के बगल के बड़े स्थानांक में एक कम कर उस अंक को उस बड़े स्थानांक को मार कर उस की जगह लिखते हैं और ऊपर उस स्थानांक में दश जोड़ कर उस जोड़ में नीचे के स्थानांक को घटा कर शेषांक को ऊपरवाले स्थानांक की जगह उस को मार कर लिखते हैं ।

क्रम-क्रिया में भी यही रीति है, विशेष इतना ही है कि एकाई से घटाना आरंभ होता है पर इस में ऊपर के अंक कई बेर मिटाने पड़ते हैं इस लिये कोई ज्यौतिषी इस रीति से नहीं घटाता ।

सब लोग उत्क्रम-रीति ही को अच्छी तरह सीखते हैं । इस घटाने को संस्कृत में व्यवकलित या व्यवकलन कहते हैं ये भी कल (शब्दसंख्यानयोः) धातु से बने हैं । वि और अव उपसर्ग लगाने से इन का अर्थ अलगाना है । ‘वियोग’ और ‘अन्तर’ भी घटाने के अर्थ में आते हैं ।

साठगुने स्थानांक-संख्याओं का जोड़ना और घटाना ।

साठगुने जहाँ स्थान हैं याने अंश, कला, विकला और प्रतिविकला या दिन, घटी, पल और विपल हैं वहाँ संस्कृत के ज्यौतिषी इस तरह जोड़ते हैं—

(पहले लिख आए हैं कि संस्कृत के ज्यौतिषी साठगुने स्थानों को बड़े स्थान के नीचे छोटे स्थानांक को खड़ी पाँती में लिखते हैं ।)

मान लो कि २ दिन, १९ घटी, २५ पल और ३७ विपल और ३ दि., २१ घ., १७ प., और ३८ विपल को जोड़ना है तो

$$\begin{array}{r} २ \\ १९ \\ २५ \\ ३७ \end{array} \left| \begin{array}{r} ३ \\ २१ \\ १७ \\ ३८ \end{array} \right\} \text{ ऐसे लिख कर नीचेवाले स्थान से जोड़ना शुरू करते हैं । } ३७ \text{ और } ३८, ७६, (७६ के १६ को ३७ या ३९ को मार कर उसकी जगह रखते हैं) ७६ के १६, हाथ आया १, १ और २५, २६, २६ और १७, ४३, (२५ या १७ को मार कर उसकी जगह ४३ रखते हैं) । १९ और २१, ४०, (१९ या २१ को मार कर उसकी जगह ४० रखते हैं) । २ और ३, ५, (२ या ३$$

को मार कर उसकी जगह ५ रखते हैं)।

घटाने में वियोज्य के विपल, पल, ... से वियोजक का विपल, पल, ... बड़ा हो तो ऊपर स्थान के अंक में एक कम कर वियोजक के विपल, पल, ... को ६० में घटा कर बाकी को वियोज्य के विपल, पल, ... में जोड़ देते हैं।

जैसे— ३ दि., १७ घ., २० प., २१ वि. में जौ १ दि., १९ घ., २२ प. और २७ वि. घटाना हो तो—

$\left. \begin{array}{r} 3 \\ 17 \\ 20 \\ 21 \end{array} \right\}$ ऐसा लिख कर किया करने में जौ नीचे स्थान से आरंभ करेंगे तो ऐसा बोलेंगे—

२१ में २७ नहीं घटते इस लिये २० के किए १९ आए साठ, साठ में गए २७ रहे ३३, ३३ और २१, ५४. (२१ को मार कर उस की जगह ५४ रखते हैं और २० को मार कर वहाँ १९ रख लेते हैं) फिर १९ में २२ नहीं घटते इस लिये १७ के किए १६, आए साठ, साठ में गए २२ रहे ३८, ३८ और १९, ५७ (१९ को मार कर उस की जगह ५७ रखते हैं और १७ को मार कर उस की जगह १६ रखते हैं)। इसी तरह ऊपर तक क्रिया करते जाते हैं। ऊपर के उदाहरण में शेष =

$\left. \begin{array}{r} 16 \\ 57 \\ 54 \end{array} \right\}$ । ज्यौतिषी लोग अक्सर घटाने की क्रिया को ऊपर के स्थान से शुरू करते हैं, याने यहाँ पहले ३ में १ घटाते फिर इस शेष में एक कम कर ६० ले आते, इस में वियोजक के १९ को घटा कर शेष ४१ को वियोज्य के १७ में जोड़ कर उसे १७ को मार कर उस के स्थान में रखते। इसी तरह नीचे तक क्रिया करते जायेंगे।

पुराने समय में कंकड़, पत्थर के टुकड़े या काठ की गोदियों से अंक समझे जाते थे। गचाँरो में अब तक कंक-

डियों से जोड़ती की जाती है। तमोली लोग अब तक चूने की बिंदी लगा कर समझ लेते हैं कि इतने पान के चौभडे हुए।

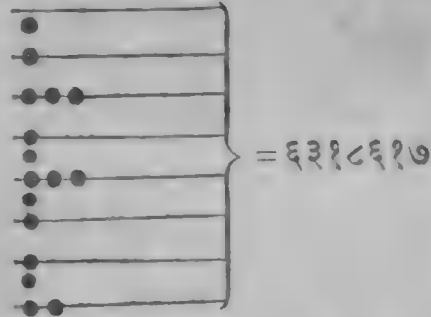
पट्टे पर धूर या बालू फैला कर उस पर गोदियों के सहारे से भी हिसाब होता था। एजिप्ट और ग्रीस में भी यही चाल थी।

हीरादत्त (Herodotus) लिखते हैं कि ग्रीक लिखने और हिसाब करने में अपने हाथ को बाईं ओर से दहिनी ओर ले जाते हैं पर एजिप्ट के लोग दहिनी ओर से बाईं ओर ले जाते हैं।

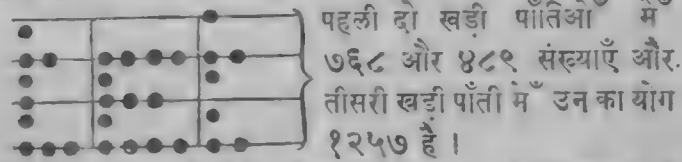
यूरप में भी सन् १५०० ई. तक सब जगह गोदियों (Canions) पर से हिसाब करने की चाल थी पर जब सब से पहले इटली और स्पेन के लोग अरब से हिंदुओं के अंक पाए तब से धीरे धीरे गोदियों की चाल उठ गई। फ्रांसीस, इंग्ल्यांड और जर्मनी में स. १६५० ई. तक गोदियों की चाल थी।

जर्मनी में सन् १६६२ ई. में एक अंकगणित की पोथी छपी गई (Arithmetica Calcularis or Arithmetica mercatoria) उस में 'बनियों का गणित' इस नाम का एक अध्याय है। उस में लिखा है कि एकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार, दशहजार और दशलख के लिये एक के नीचे एक ऐसी सात निरखी रेखाएँ मान ली गई हैं सब से नीची रेखा एकाई की और उस के ऊपरवाली क्रम से १०, १००, की मानी गई हैं। किसी स्थान का अंक जौ एक गाही (५) से बड़ा हो तो उस में से एक गाही को निकाल कर बाकी अंक के बराबर उस स्थान की रेखा पर गोदियों को रख देते हैं और उस के ऊपर उसके ऊपरवाले स्थान की रेखा के नीचे उस गाही के लिये एक गोटी को रख देते हैं। इस तरह से बणियाँ संख्या

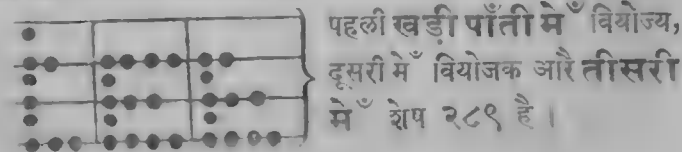
लिख लेते हैं । जैसे—



जो दो संख्याओं को जोड़ना हो तो ऊपर की रीति से संख्याओं के स्थानांकों को **निरखी रेखाओं** के ऊपर लिख कर एक एक स्थान की **गोटियों** की गिनती कर **गाहियों** को ऊपर रखते और दो **गाहियों** को ऊपर के एक **स्थानांक** के बराबर करते ऊपर तक चले जाते हैं । जैसे ७६८ और ४८९ को जोड़ना हो तो ऊपर की रीति से —



इसी तरह घटाने में जौ **वियोजक गोटियों** की गिनती **वियोज्य** की **गोटियों** से बड़ी हो तो ऊपर से एक **गाही** उतार लेते हैं । जौ **गाही** की गिनती बड़ी हो तो ऊपर के स्थान की एक **गोटी** उतार कर दो **गाही** और कर लेते हैं । जैसे ऊपर के उदाहरण में जौ पहली संख्या में दूसरी को घटाना हो तो ऊपर की रीति से



सान ही रेखाओं के लेने से जान पड़ता है कि उस समय एक **करोड** के भीतर ही लेन देन का व्यवहार था ।

अरब के अलकल्सडी अपने **गुबारगणित** की पोथी में, **योग और शेष** को सब के ऊपर एक **लकीर** दे कर लिखा है । जैसे— ३३८ और ४६ का योग उन की रीति से $\frac{3}{10} \frac{3}{10} \frac{8}{10}$ और शेष $\frac{2}{10} \frac{8}{10} \frac{2}{10}$ ऐसे लिखे जायेंगे ।

अंकों का गुणन और भागहार ।

जिस से गुणते हैं उसे **गुणक** और जिसे गुणते हैं उसे **गुण्य** कहते हैं । कभी कभी **गुणक** को **गुण** भी कहते हैं । **गुण्य** को **गुणक-तुल्य** स्थान में रख कर जोड़ देने ही को **गुणन** कहते हैं इस लिये **गुणन** एक तरह की **योगक्रिया** ही है । जिस में **भाग देते हैं** उसे **भाज्य** और जिस से **भाग देते हैं** उसे **भाजक** कहते हैं । **भाज्य** में ज बार **भाजक** घट जाय उसे **लब्धि** या **फल** कहते हैं । इस तरह से कह सकते हैं कि **भागहार** एक घटाने का लघुप्रकार है ।

गुणने के लिये पहले लोग कम से कम नव तक के पहाड़े याद करते हैं । **संस्कृत** के ग्रन्थों में इस **पहाड़े** की कहीं चर्चा नहीं है । **अक्षर** और **अंकों** की सूरत और **पहाड़े** वगैरह सब जगह बहुत प्रसिद्ध होने से छोड़ दिए गए । **भास्कर** ने अपनी **लीलावती** के **परिभाषा-प्रकरण** के अंत में लिखा है कि 'शेषा कालादिपरिभाषा लोकतः प्रसिद्धा ज्ञेया' याने बाकी दिन, घटी वगैरह की **परिभाषा** संसार में प्रसिद्ध हैं उन्हें **लोगों** से जान लो । **मिथिला** में **पहाड़े** को '**दुनाई**' कहते हैं, इसी तरह जुदे जुदे देशों में इस के जुदे जुदे नाम हैं पर हम लोगों को इस का **संस्कृत** नाम नहीं मिलता । **तुलसीदास** ने भी सतसई में इस का नाम **पहाड़ा** लिखा है 'नव के लिखत पहार' ।

इस में दूने, तिगुने, ... अंक बढ़ते जाते हैं इसी लिये शायद इस का नाम पहाड़ (पर्वत) रक्खा गया हो क्योंकि पहाड़ भी एक से दूसरे ऊँचे और बड़े देख पड़ते हैं। हिंदुओं की गिनती में दशगुने स्थान होने से १-९ अंकों के पहाड़ में एकगुने से दशगुने तक अंक रहते हैं। गुरु लोग लड़कों को हिसाब में पका करने के लिये चालीस तक के पहाड़ कंठ कराते हैं। रोमन में बारहगुने स्थान होते हैं इस लिये यूरप में १-१२ तक के पहाड़ में सब अंक १-१२ गुने रहते हैं।

अँगरेजीराज के पहले व्यवहार के बहुत से हिसाब मुँह-जबानी हो जायँ इस के लिये हिंदुस्तान में पौना, सवैया, डेढ़ा, अठइया, हूठा, धौँचा और पौँचा कंठ किए जाते थे। अब भी बनिँ अपने लड़कों को पौना, सवैया और डेढ़ा तो जरूर ही सिखाते हैं।

पौने में संख्या $\frac{1}{2}$, सवैए में $\frac{1}{3}$, डेढ़े में $\frac{1}{4}$, अठैए में $\frac{1}{5}$, हूठे में $\frac{1}{6}$, धौँचे में $\frac{1}{7}$, और पौँचे में $\frac{1}{8}$ गुनी रहती है। ४ पौने ३, ४ सवैए ५, ४ डेढ़े ६, ४ अठैए १०, ४ हूठे १४, ४ धौँचे १८ और ४ पौँचे २२ होते हैं। कहीं कहीं विकट पहाड़ की भी चाल है। उस में $\frac{1}{2}$ यह संख्या $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ और $\frac{1}{7}$, गुनी रहती है। जैसे खोदे खोदे सवा दो ($\frac{1}{2}$), खोदे अठैए पौने चार ($\frac{1}{4}$), ...।

एक एकना भी होता है इस में १-१०० के वर्ग रहते हैं।

एकना एक, दुआ दुइ चार, त्रि तिका नव, चार चौक १६, ... ऐसे बोले जाते हैं।

एक बड़ा ग्यारहा भी होता है उस में ११-२० संख्याएँ, ११-२० गुनी तक रहती हैं। जैसे ग्यारह ग्यारह १२१, ग्यारह बारह १३२, ग्यारह तेरह १४३, ...। बारह ग्यारह १३२, बारह बारह १४४, बारह तेरह १५६, ...।

बीस ग्यारह २२०, बीस बारह २४०, ...।

मिथिला प्रांत में एक बड़ा पौना भी होता है उस में $\frac{1}{2}$ याने पौने दो गुनी संख्याएँ रहती हैं।

पौना, सवैया, डेढ़ा, अठइया, कम से पादोन, सपाद, अध्यर्ध, और अध्यर्धद्वि संस्कृत शब्द के अपभ्रंश तो साफ साफ मालूम होते हैं पर अध्यर्धत्रि, अध्यर्धचतुः और अध्यर्धपञ्च के अपभ्रंश हूठा, धौँचा और पौँचा के होने में कुछ संशय होता है, शायद संस्कृत के शब्द कुछ प्राकृत में बिगड़े फिर प्राकृत के वे शब्द और बिगड़ कर हिंदी में हूठा, धौँचा और पौँचा हुए हों।

जब से गाँव गाँव में तहसीली स्कूल जारी हुए हैं तब से पौना, सवैया, ... सिखाने की चाल उठ गई है अब लड़कों को कुछ पहाड़े सिखा दिए जाते हैं।

हिंदूलोग बीजगणित में बहुत निपुण होते चले आए, पर बड़े दुःख की बात है कि तहसीली स्कूलों से बीजगणित उठा दिया गया। अब लड़कों के मन में उस का संस्कार ही नहीं पैदा होता इस लिये बड़े होने पर वे क्या बीज का विचार कर सकेंगे।

संस्कृत में गुणन की छ रीति है। गणेश ने सन् १५२० ई. में एक सातवीं रीति भास्कर-लीलावती की टीका बुद्धिविलासिनी में दिखाई है पर वह रीति प्रचलित नहीं है। इस तरफ इस रीति को मुसलमान लोग 'जरब कोठरी' कहते हैं। बहुतों का मत है कि अरब के लोग इस रीति को निकाले हैं। वे लोग इस रीति को शहाबकः (Shahabakah) कहते हैं।

जरबकोठरी की रीति—

गुण्य और गुणक के स्थान तुल्य भुज कोटि मान कर

एक आयत बना लो, उस में भुज-कोटि के घात तुल्य याने क्षेत्रफल तुल्य वर्ग कोठे बना कर कर्ण खींच कर हर एक वर्ग कोठे का दो हिस्सा कर डालो गुण्य के स्थानांको को भुज के ऊपर और गुणक के स्थानांको को कोटि के ऊपर क्रम से रख कर गुणक के प्रत्येक स्थानांक से गुण्य के स्थानांको को गुणा कर गुणनफल की हर एक एकाई अपने अपने वर्गकोठे के कर्ण की दहनी ओर और हाथ आए को बाई ओर रखते जाओ फिर कर्ण रेखाओं के भीतर तिरछे अंको का योग करने से गुणनफल हो जायगा।

जैसे जौ गुण्य = २५६७ और गुणक = ६७८ तो ऊपर की क्रिया से

	२	५	६	७
६	१२	३०	३६	४२
५	१०	२५	३०	३५
४	८	२०	२४	२८
३	६	१५	१८	२१
२	४	१०	१२	१४
१	२	५	६	७

गुणनफल = १७४०४२६

नेपियर साहब भी इसी तरह गुणा करते थे। वे रेखाओं की जगह पतली पतली चौखूटी लकड़ियाँ रखते थे जिन पर १-९ तक के पहाड़े खोदे हुए थे। उन के व्यवहार करने से इन लकड़ियों का नाम ही '*Vergulae or rods of Napier*' पड़ गया है। यूरोप में सब से पहले जिस पोथी में इन लकड़ियों का वर्णन है वह स. १६१७ ई. में राब्डोलोगिआ (*Rodbologia*) नाम से छपी गई और च्यांसलर सेटोन (*Seton*) को अर्पण की गई। सेटोन (*Seton*) को इस बात का बड़ा गौरव था कि मेरे समय में गुणन करने के एक छोटे यंत्र और लघुरिक्थ (*Logarithm*) का पता लगा क्योंकि नेपियर

(*Nepier*) ने एक तरह का लघुरिक्थ भी निकाला है।

उस के बाद सन् १६२५ और सन् १६५० ई. के बीच में जितनी अंकगणित की पोथियाँ छपी गईं सभी में इस गुणन-यंत्र का वर्णन है।

पिकाक साहब के मत से दशमलव गणित के निकालनेवाले भी नेपियर ही हैं क्योंकि सब से पहले इस का वर्णन उन्हीं की राब्डोलोगिआ (*Rodbologia*) में है। सन् १६१९ और सन् १६३१ ई. के बीच में यूरोप में जितनी अंकगणित की पोथियाँ हैं किसी में दशमलव गणित की चर्चा नहीं है। इस का अधिक विचार दशमलव के प्रकरण में किया जायगा।

गुण्य और गुणक दोनों गुण (आमन्त्रणे) धातु से बने हैं, जो गुणने के लायक वह गुण्य और जो गुणे वह गुण या गुणक कहाता है।

गुणन में गुण्य के अंक मारे जाते हैं इस लिये बध, हनन, ताडन, निघ्न, ... ये सब 'मारने' अर्थ के शब्द गुणन के लिये बोले जाते हैं।

गुणन की छ रीतियों में सब से पहली रीति प्रधान है। सब संस्कृत के ज्यौतिषी इसी पहली रीति से गुणा करते हैं।

पहले लिख आए हैं कि पुराने लोग जमीन या पट्टे पर धूर फैला कर उस पर हिसाब करते थे, उसी पर गुणन भी किया जाता था। गुणन में अंक बहुत न फैले और जमीन या पट्टे पर जगह भी बची रहे इस लिये वे लोग अंको को मार कर उन की जगह नए नए अंको को लिखते हैं। इस पहली रीति का नाम कपाट-संधि है। संस्कृत में केवाडे (पल्ले) को कपाट कहते हैं।

जैसे दरवाजे में एक पहलू के ऊपर बंद करने पर दूसरा पहलू कुछ चढ़ा रहता है उसी तरह इस रीति में गुण्य के सब से बड़े स्थान के अंक के नीचे गुणक की एकाई रहती है इसी लिये इस का नाम 'कपाट-संधि' रक्खा गया है।

गुणक के हर एक स्थानों के अंकों से गुण्य का सब से बड़े स्थान का अंक पहाड़े की रीति से गुण गुण कर गुणक के स्थानांकों के शिर पर रक्खा जाता है पर गुणक की एकाईवाले अंक से गुणने पर जो अंक होता है वह गुण्य के सब से बड़े स्थानांक के स्थान में उस को मार कर लिखा जाता है। हाथ आने पर उस को उस के बगलवाले अंक में मिला कर उस को मार कर उस के स्थान में लिखते हैं, फिर गुणक को उठा कर गुण्य के दूसरे बड़े स्थान के अंक के नीचे उसी चाल से रख कर ऊपर की क्रिया करते हैं। इस तरह गुण्य के सब स्थानों के अंकों के गुण जाने पर गुण्य के स्थान में गुणनफल आ जाता है। यह क्रिया कागज पर नहीं हो सकती तौ भी समझने के लिये एक उदाहरण दिखाते हैं।

गुण्य = २५७६ और गुणक = ३४५ है तो गुणनफल जानने के लिये पहले गुण्य को और उस के नीचे गुणक को

$\begin{array}{r} 2576 \\ \times 345 \\ \hline \end{array}$ ऐसा लिखते हैं। २ को गुणक के हर एक स्थानांकों से गुणने से और ऊपर की रीति से गुणे हुए अंकों को रखने से

$\begin{array}{r} 2576 \\ \times 345 \\ \hline 12880 \\ 10304 \\ 7728 \\ \hline 898240 \end{array}$ ऐसा हुआ। गुणक को घसका कर गुण्य के दूसरे स्थानांक ५ के नीचे उस की एकाई रख कर और सब स्थानों के अंक क्रम क्रम से बाईं ओर रखे जायेंगे और फिर ऊपर ही की रीति से क्रिया की जायगी। आगे फिर गुणक को घसका कर उस की एकाई गुण्य के ७ के नीचे रखी जायगी। इस तरह गुण्य के

सब स्थानों के अंक गुण जाने पर ऊपर की पाँती में गुणनफल होगा।

आर्यभट ने अपने आर्यभटीय में जो स. ४९८ ई. में बनाई गई है इस रीति को प्रसिद्ध समझ कर छोड़ दिया है। ब्रह्मगुप्त ने अपने ब्राह्मस्फुट-सिद्धान्त के, जो सन् ६२८ ई. में बना है गणिताध्याय (अंकगणित) में इस की चर्चा प्रसिद्ध समझ कर न की। श्रीधर ने अपनी त्रिशतिका में इस रीति का नाम 'कपाटसंधि' लिखा है और गुणनफल का नाम प्रत्युत्पन्न रक्खा है। ब्रह्मगुप्त ने भी गुणनफल का नाम प्रत्युत्पन्न ही लिखा है। क्यांदर (Cantor) ने भूल से गुणनफल का संस्कृत नाम 'तत्स्थ' लिखा है। श्रीधर का सूत्र यह है—

“उत्सार्योत्सार्य ततः कपाटसन्धिर्भवेदिदं करणम्।

तस्मिंस्त्रिष्टुति यस्मात् प्रत्युत्पन्नस्तत्तत्स्थः॥”

इस में 'तत्स्थ' का उस जगह रहनेवाला यह अर्थ है (त्रिशतिका देखो)।

गुण्य की जगह जो फिर पैदा हो उसे प्रत्युत्पन्न कहते हैं। प्रति, उत् उपसर्ग और पद (गतौ) धातु से प्रत्युत्पन्न बना है।

भास्कर ने अपनी लीलावती में सब से पहले इस गुणन-रीति को लिखा है पर इस का नाम नहीं बताया है।

दूसरी रीति में गुणक के मन माने खंड कर हर एक खंड से गुण्य को गुण कर सब जोड़ लेने से गुणनफल निकाला है। यह वही रीति है जो रेखागणित के दूसरे अध्याय की दूसरी शकल से सिद्ध होती है।

तीसरी रीति में गुणक में ऐसी संख्या का भाग देते हैं जिस में पूरी लब्धि आवे। फिर उस संख्या से गुण्य को गुण कर गुणे हुए को उस लब्धि से गुण देते हैं वही गुणनफल होता है। जैसे $12 \times 134 = 3 \times 4 \times 134$ ।

चौथी रीति वही है जो आज कल सब स्कूलों में जारी है और जिसे लोग भूल से कहा करते हैं कि अँगरेजी रीति है।

पाँचवीं और छठवीं रीति दूसरी रीति ही के अन्तर्गत है।

गोमूत्रिका-गुणन ।

जहाँ गुण्य और गुणक में अंश, कला, विकला या दिन, घटी, पल, विपल रहते हैं वहाँ संस्कृत के ज्यौतिषी लोग जिस रीति से गुणा करते हैं उस रीति को गोमूत्रिका कहते हैं। पुराने ग्रंथों में इस का नाम नहीं मिलता पर परंपरा से बहुत पुराने समय से इस का व्यवहार चला आता है। ऐसा कोई ज्यौतिषी न होगा जो इस का नाम न जानता हो। गोविंदाचारी ने सन् १८३६ ई. में अपने साधनसुबोध ग्रंथ में ('गोमूत्रिकयाऽभिताडिता') इस की चर्चा की है यह गुणन एक तरह का खंडगुणन है जिसे ऊपर दूसरी रीति लिख आए हैं। जैसे २ दि. १५ घ. ५३ प. और ३२ वि. से ४ अंश. २ कला. ९ विक. को गुणना हो तो यहाँ गुणक में चार महल हैं इस लिये एक एक स्थान बढ़ा कर नीचे चार जगह गुण्य को रखने से और गुणक के हर खंड से गुण कर स्थानों को जोड़ कर फिर साठ से भाग दे दे कर ऊपर चढ़ा देने से गुणनफल हो जाता है। जैसे ऊपर की क्रिया से

२	४।२।९।
१५	४।२।९।
५३	४।२।९।
३२	४।२।९।

गुणक के हर एक खंड से गुण देने पर

८।	४।	१८
६०।	३०।	१३५
२१२।	१०६।	४७७
१२८।	६४।	२८८।

बराबर स्थानों के अंकों को जोड़ देने से

८। ६४। २६०। ३६९। ५४१। २८८

साठ से भाग दे कर ऊपर चढ़ा देने से

गुणनफल = ९। ८। २६। १८। ५। ४८

जौ साठ गुने स्थान के बदले दश गुने हों तो यह गोमूत्रिकारीति एक तरह की भास्कर की चौथी रीति हो जाती है जो कि आज कल सब स्कूलों में जारी है।

जैसे २३५ से १२२३ को गुणना हो तो

गोमूत्रिका रीति से—

२।	१२२३	}	गुण देने से	२४४६
३।	१२२३			३६६९
५।	१२२३			६११५

जोड़ देने से गुणनफल = २८७४०५

देखो जो रीति आज कल स्कूलों में प्रचलित है यह वही रीति है इसमें भेद इतना ही है कि जिस तरह से तिरछी पाँती प्रचलित रीति में रहती है उस से उलटी इसमें है।

इस क्रिया में गुण्य के अंक कई जगह आगे आगे रहते हैं। जैसे चलती गाय के मूत्र से जमीन पर टेढ़ी पानी की धारा से रेखा हो जाती है उसी तरह इसमें गुण्य की कुछ सूरत होने से लोग इसे गोमूत्रिका कहते हैं।

सभी चलते जानवरों के मूत्र से ऐसी टेढ़ी रेखा होती है पर सब जानवरों से गाय को पवित्र समझ कर संस्कृत के गणकों ने इस का नाम 'गोमूत्रिका' रक्खा।

भारवि ने अपने किरातार्जुनीय काव्य के १५वें सर्ग के १२वें श्लोक—

“नासुरेयं न वा नागो धरसंस्थो न राक्षसः ।

नासुखोयं न वा भोगो धरणिस्थो हि राज सः ॥

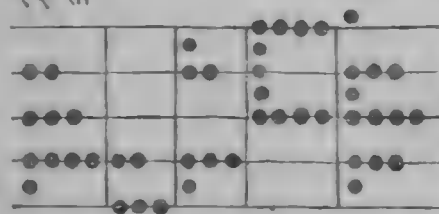
को गोसूत्रिकाबन्ध किया है ।

संस्कृत के ज्यौतिषी अपने सुभीते के लिये कभी कभी गुण्य और गुणक को बदल देते हैं याने गुण्य को गुणक और गुणक को गुण्य मान कर गुणनफल निकालते हैं और 'गुण्य-गुणकयोः परस्परं कामचारः' याने गुण्य और गुणक में आपस में भद्भाचारा है याने अदल बदल देने से गुणनफल में कुछ विकार नहीं होता, यह कहा करते हैं ।

जर्मनी में जो सन् १६६२ ई. में अंकगणित की पोथी छपी है उस में गोटिओ पर से जो गुणन-क्रिया लिखी है उस की रीति—

गुण्य और गुणक के स्थानांको को गोटिओ की रीति से, जैसा ऊपर कह आए हैं रख कर गुणक की एकाई से गुण्य के हर एक स्थानांको को गुण कर गुणनफल तीसरी खड़ी पाँती में रक्खो फिर गुणक की दहाई के अंक से गुण्य के हर एक स्थानांको को गुण कर गुणनफल चौथी खड़ी पाँती में दहाई की रेखा पर से रखना शुरू करो । इस तरह हर एक बार एक एक रेखा छोड़ते ऊपर अंको को रखते जाओ ।

पीछे सब अंको को जोड़ कर अगली खड़ी पाँती में रख दो वही गुणनफल होगा । जैसे गुण्य = २३४५ और गुणक = २३ तो



गुणनफल = ५३९३५ होगा ।

इस क्रिया और प्रचलित क्रिया में कुछ भेद

नहीं है वहाँ अंको से तिरछी पाँती में संख्या रक्खी जाती है यहाँ गोटिओ से खड़ी पाँती में संख्याएँ हैं ।

इटली में *Lucas de Burgo* ने गुणन की आठ रीति लिखी है वे सब ऊपर लिखी हुई रीतिओ की के भेद हैं । इस का अंकगणित सन् १४९४ ई. में छपा गया है उस का नाम समा ड अरिथमेटिका (*Somma de Arithmetica*) है ।

भाग-हार—

अपनी अपनी चाल से गुणने और घटाने पर सारे संसार में इस की दोही रीति है । एक भाज्य और भाजक में विना अपवर्त्तन दिए और दूसरी अपवर्त्तन दिए है । विना अपवर्त्तन या अपवर्त्तन देने पर भाज्य के सब से बड़े स्थान से क्रिया आरंभ होती है । वहाँ से क्रम क्रम से लब्धि-गुणा हार (भाजक) भाज्य में घटाया जाता है । भाग करने लायक जो हो उसे भाज्य और भाग करनेवाले को भाजक कहते हैं या भाग हरनेवाले को हार (भाजक) भी कहते हैं । भज (सेवायां) धातु से कर्म में घञ् प्रत्यय करने से भज्यते इति भागः बनता है । इसी भाग के अर्थ में अंश (विभाजने) धातु से कर्म में घञ् प्रत्यय करने से 'अंश' बनता है । इसी अर्थ में लूञ छेदने से लव बना है । हृ हरणे से हार बनता है । भाग को जो हरे याने ले उसे भाग-हार कहते हैं । हार के अर्थ में छिदिर (द्वैधीकरणे) धातु से छेद बना है ।

ब्रह्मगुप्त ने ऊपर की रीति के आधार से एक नई रीति लिखी है—

भाजक में कुछ इष्ट जोड़ या घटा कर नया भाजक बनाओ । नए भाजक से भाज्य में भाग देकर लब्धि निकालो । इस लब्धि को इष्ट से गुणा कर पुराने भाजक से भाग देने पर जो लब्धि मिले इसे पहली लब्धि में कम से जोड़ घटा दो याने भाजक में इष्ट जोड़ कर नया भाजक बनाया गया हो तो

जोड़ो और इष्ट घटा कर नया भाजक बनाया गया हो तो घटाओ। यह नई रीति नहीं है पुरानी ही के आधार से निकली है (मेरा छपवाया ब्राह्मस्फुट-सिद्धान्त के छायाधिकार का ५७ वाँ श्लोक देखो)।

गर्बर्ट (Gerbert) ने भी अपनी पोथी में इसी रीति को लिखा है। ये बड़े नामी आदमी थे। इन के विद्यार्थी महाराज तीसरे ओथो (Otto III) ने इन्हें दूसरे सिल्वेस्टर (Sylvester II) के नाम से पोप (Pope) बनाया था। ये सन् १००३ ई. में मरे हैं।

जौँ ध्यान देकर विचारो तो गुणन की पहली रीति 'कपा-ट-संधि' की ठीक उलटी क्रिया भाग-हार है। संस्कृत के ज्यौतिषी भाग-हार की क्रिया झट समझ में आ जाय इसी लिये गुणन की उस पहली रीति ही को अच्छी तरह से सीखते हैं।

सीख लेने पर स्कूल की प्रचलित (चौथी) रीति सीखेवालों से बहुत जल्दी गुणा करते हैं। इस क्रिया में दोष इतना ही है कि जौँ कहीं बीच में गलती हो जाय तो फिर शुरू से क्रिया करनी पड़ती है क्योंकि सब अंक तो बराबर मिटाए जाते हैं; उन की जगह नए नए लिखे जाते हैं इस लिये किस जगह गलती हुई इस का पता नहीं लगता। भास्कर-लीलावती की मनोरंजनी टीका और (Lucas de Burgo) के ग्रंथ में भाग देने की कई एक नई रीति हैं पर वे कहने के लिये नहीं हैं हकीकत में सब पुरानी ही रीति की दूसरी सूरत हैं।

गुणनफल और लब्धि को जाँचना।

९ अंक पर से गुणनफल और लब्धि को जाँचना याने ये दोनों गणित करने से ठीक आए या गलत इस के लिये जो स्थान

के अंकों के योग में नव घटा घटा कर बाकी निकालने की प्रसिद्ध रीति है उस को अरब के ज्यौतिषियों ने अपने अपने ग्रंथों में लिखा है और कभी कभी लोग इसे 'हिंदू-उपपत्ति' (Hindu-Proof) भी कहते हैं पर दूसरे आर्यभट्ट के महासिद्धान्त को छोड़ कर और किसी प्रसिद्ध संस्कृत ग्रंथ में इस की चर्चा नहीं है। नारायण पंडित ने अपनी गणितकौमुदी में किसी अंक पर से गुणनफल जाँचने की विधि लिखी है—

‘इष्टहृतगुण्यगुणाकावशेषघातस्थष्टहृच्छेषम्।

तुल्यं चेदिष्टाद्धृतिशेषेण स्यात् स्फुटात्र हतिः॥’

यूरप में ल्यूकस ड बर्गो (Lucas de Burgo) ने अपने अंकगणित में जोड़ने, घटाने, गुणने और भाग में इस रीति को लिखा है। उस ने ७ पर से भी एक विधि लिखी है पर उस रीति में संख्याओं में ७ का भाग देना पड़ता है। इस से अच्छी विधि ११ से है। इस में संख्याओं के विषम और सम स्थानांकों के योग में ११ से भाग देने पर जो दोनों जगह बाकी बचते हैं उन के अंतर पर से बाकी निकालते हैं या सब से बड़े स्थानांक को उस से दूसरे स्थानांक में घटाना बाकी को उस के आगेवाले स्थानांक में घटाना फिर इस शेष को उस के आगेवाले स्थानांक में घटाना इस तरह अंत में जो शेष बचे वही संख्या में ११ के भाग देने से शेष बचेगा। पहला स्थान संबन्धि अंक जौँ आगे के स्थानांक में न घटे तो स्थानांक में ११ जोड़ कर घटाना चाहिए। जैसे २४७८९६ इस में ४-२=२, ७-२=५, ८-५=३, ९-३=६, ६-६=०, इस से सिद्ध हुआ कि २४७८९६ यह संख्या ११ से निःशेष होगी और २८३४७१ इस में ८-२=६, यह अगले स्थानांक ३ में नहीं घटता इस लिये ११ जोड़ देने से ३+११-६=८, ४+११-८=७, ७-७=०, १-०=१। इस लिये २८३४७१ इस में ११ के भाग देने से १ बचेगा।

अल हुरेशन ने सन् (९८०-१०३७) में जोड़ने को जाँचने के लिये ९ की रीति लिखी है।

दूसरे आर्यभट्ट ने अपने महासिद्धान्त में गुणन, भजन, वर्ग, वर्गमूल, घन और घनमूल के जाँचने के लिये इस रीति को लिखा है। वे इस रीति से बाकी निकालते हैं—

जैसे यह जानना हो कि ६७८९७६ इस में ९ का भाग देने से क्या बचेगा तो $६ + ७ + ८ + ९ + ७ + ६ = ४३$, $४ + ३ = ७$ यह एक स्थान की संख्या हुई इस लिये ६७८९७६ इस में ९ का भाग देने से ७ बाकी बचेगा। (मेरा छपवाया महासिद्धान्त का १८वाँ अध्याय देखो)

इसी तरह स्थानांकों के योग में जब तक एक से ऊपर स्थान रहेंगे तब तक हर एक योग के स्थानांकों का योग करते जायेंगे।

जाम्ब्लिकस (Jamblichus) ने एक रीति लिखी है—

पास पास की तीन संख्याओं में जौ सब से बड़ी संख्या ३ से निःशेष हो तो उन तीनों संख्याओं के योग के स्थानांकों का योग करो, जौ इस योग में एक से अधिक स्थान हो तो फिर इन स्थानांकों का योग करो यों वार वार किया करने से अंत में योग ६ होगा। जैसे—

६४, ६५, ६६, इन पासवाली तीन संख्याओं में सब से बड़ी ६६ तीन से निःशेष होती है इस लिये

$$६४ + ६५ + ६६ = १९५, १ + ९ + ५ = १५, १ + ५ = ६।$$

यह वही बात है जैसा कि दूसरे आर्यभट्ट ने लिखी है क्योंकि बड़ी संख्या जौ ३ य मानो तो इस के पीछे की संख्या = ३ य-१ और इस के पीछे की = ३ य-२ और तीनों का योग

$$= ९ य-३ = ९(य-१) + ९-३ = ९(य-१) + ६, इस$$

लिये यहाँ ९ के भाग देने से ६ शेष रहते हैं इस लिये दूसरे आर्यभट्ट की रीति से अंत में स्थानांकों का योग ६ होगा।

जौ यह हिंदुओं की रीति हो तो भास्कराचार्य के पीछे बनी होगी क्योंकि भास्कराचार्य ने ऐसी उत्तमरीति को अपनी लीलावती में नहीं लिखा जिन्होंने यहाँ तक लिख दिया है कि किसी क्षेत्र में जौ एक भुज से और भुजों का योग छोटा या बराबर हो तो समझना कि यह क्षेत्र अशुद्ध है याने उन भुजों से क्षेत्र नहीं बनेगा।

इससे जान पड़ता है कि स. १३५६ ई. के बाद यह हिंदुओं में प्रचलित हुई हो तो हो। इन सब बातों से यह अनुमान होता है कि सब से पहले महासिद्धान्त में यह रीति लिखी गई फिर पीछे से इसी रीति के आधार से आज कल की प्रचलित रीति निकली। श्रीधर वगैरह के समय में महासिद्धान्त का अधिक प्रचार न होने से उन लोगों का ध्यान इस रीति पर न गया।

किसी बौद्ध ने शायद इस प्रचलित रीति को निकाला हो जिसे हिंदू लोगों ने धर्म के भय से न देखा हो फिर इसी को अरब के अलहुरेशन ने सन्. ९८०-१०३७ ई. में ले लिया हो। जो हो पर ठीक ठीक ल्युकस ड बर्गो (Lucas de Burgo) की रीति किसी प्रसिद्ध संस्कृत ग्रंथों में नहीं पाई जाती।

इस में संशय नहीं कि तुलसीदास ने अपनी सतसैया में लिखा है कि जैसे ९ के पहाडे में सब जगह (१८, २७, ३६, ...) के स्थानांकों के योग में ९ रहता है इस तरह इस संसार में सब जगह राम को समझ कर उन से स्नेह करना चाहिए। याने किसी क्षण में राम न भूलने पावें—

“तुलसी राम सनेह करु त्यागु सकल उपचार।

जैसे घटत न अंक नव नव के लिखत पहार॥

दुगुने तिगुने चौगुने पंच स्वसठ औ सात ।

आठहु ते पुनि नव गुने नव के नव रहि जात ॥”

वर्ग और घन ।

आर्यभट ने अपने आर्यभटीय के गणितपाद के ३ श्लोक में लिखा है कि समचतुर्भुज को वर्ग कहते हैं और दो बराबर संख्याओं (भुजों) के गुणनफल को उस वर्ग का फल कहते हैं। तीन बराबर संख्याओं के गुणनफल को घन कहते हैं याने घनक्षेत्र का फल कहते हैं जो कि चारह कोने का होता है। उन का श्लोक—

“वर्गः समचतुरस्रः फलं च सदृशद्वयस्य संवर्गः ।

सदृशत्रयसंवर्गो घनस्तथा द्वादशाक्षः स्यात् ॥” यही है ।

परमेश्वर ‘द्वादशाक्ष’ की टीका में लिखते हैं कि—

“हस्तोन्मितिदैर्घ्यपिण्डविस्तृतेः समचतुरस्रस्य स्तम्भादैर्यथा मूले तिर्यगायतानि चत्वार्यस्त्राणि भवन्ति । तथाग्रे चत्वारि । अध ऊर्ध्वगतानि चत्वारि । एवं द्वादशभिरसैर्युतं क्षेत्रं च घनसंज्ञं भवतीति ।” इन का लिखना ठीक भास्कर की लीलावती के ऐसा है । बात इतनी ही है कि दो बराबर संख्याओं का गुणनफल वर्ग और तीन बराबर संख्याओं का गुणनफल घन कहाता है । वर्गक्षेत्र का फल उस के एक भुज के वर्ग के बराबर और घनक्षेत्र का फल उस के एक भुज के घन के बराबर होता है ।

इस से यह साफ मालूम देता है कि आर्यभट के समय वर्गक्षेत्र और घनक्षेत्र का प्रचार हो गया था ।

ब्रह्मगुप्त ने अपने ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त के गणिताध्याय में वर्गक्रिया को बहुत प्रसिद्ध समझ कर छोड़ दिया है । संख्या का दो खंड कर घनक्रिया की दूसरी रीति लिखी है जो कि भास्कर की लीलावती में भी है । जैसे —

जौ अ = क + ख तो अ^३

$$= क^३ + ३ क^२ ख + ३ क ख^२ + ख^३ ।$$

यही ब्रह्मगुप्त की रीति है, इसी को भास्कर ने भी ले लिया है । भास्कर ने घन करने की और दो विधि लिखी है । (उन की लीलावती देखो)

श्रीधर ने अपनी त्रिशतिका (पाटीसार) में वर्ग की चार विधि लिखी है—

$$(१) अ^३ = अ \times अ ।$$

$$(२) अ = क + ख तो अ^३ = क^३ + ३ क ख + ख^३ ।$$

$$(३) अ^३ = १ + ३ + ५ + \dots अ पद तक ।$$

$$(४) अ^३ = (अ-३) (अ+३) + ३ ।$$

भास्कर ने लीलावती में श्रीधर की (३) रीति छोड़ दी है ।

पैथागोरास (Pythagoras) के स्कूल के ज्यौतिषी श्रीधर की (३) विधि जानते थे । उन लोगों ने यह भी दिखलाया है कि समसंख्याओं के योग से जो २, ६, १२, २०, ... ये संख्याएँ होती हैं, उन में ६, १२, २०, ३०, ... के ऐसे गुण्य-गुणकरूप दो खंड होते हैं जिनका अंतर एक होता है । जैसे—
६ = २.३ ∴ ३-२ = १ । १२ = ३.४ ∴ ४-३ = १, ...

श्रीधर ने घन करने की तीन विधि लिखी है—

$$(१) अ^३ = अ \times अ \times अ ।$$

$$(२) अ = क + ख तो अ^३ = क^३ + ३ क^२ ख + ३ क ख^२ + ख^३ ।$$

$$(३) अ^३ = (अ-१)^३ + ३ अ (अ-१) + १ ।$$

भास्कर ने अपनी लीलावती में (३) विधि छोड़ दी है उसके स्थान में एक नई विधि अ^३ = क^३ + ३ क.ख (क + ख) + ख^३ = क^३ + ख^३ + ३ क.ख.अ लिखी है जो कि (२) विधि की एक दूसरी सूरत है । नारायणपंडित ने श्रीधर की (३) विधि लिखी है ।

ग्रीक निकोमाकस (Nicomachus) ने स. १०० ई. में घन करने की एक नई रीति लिखी है — जिसका घन करना हो उतनी विषमसंख्याओं का योग, पिछली विषमसंख्याओं को छोड़ कर, कर लो याने जौं न^३ जानना हो तो पहले 'न^२-न+१' इस विषम संख्या को लो और इसके आगे 'न-१' विषम संख्याओं को और ले कर सब का योग कर दो तो 'न^३' हो जायगा।

जैसे $n=1$, तो $n^2-n+1=1^2-1+1=1$ = पहला विषम और $n-1=1-1=0$ इस लिये $n^3=1^3=1$ । जौं $n=2$ तो $n^2-n+1=2^2-2+1=3$ पहला विषम और

$n-1=2-1=1$ इस लिये $2^3=3+1=4$ । इसी तरह $3^3=7+1+1=9$ । $4^3=13+1+1+1=16$ । $5^3=19+1+1+1+1=25$ । $6^3=25+1+1+1+1+1=36$ । $7^3=31+1+1+1+1+1+1=49$ । $8^3=37+1+1+1+1+1+1+1=64$, ...।

इसी निकोमाकस के समय ग्रीस के लोग अंकगणित की ओर झुके और तब से 'रेखागणित' दब गया।

वृत्ती (वर्जने) धातु से कर्म में घञ् प्रत्यय करने से 'वृज्यते इति वर्गः' याने औरों (गुणनफलों) से जो अलग रहे वह वर्ग है।

हन (हिंसागत्योः) धातु से अप् प्रत्यय और घनादेश करने से घन बनता है (हन्यते त्रिभिः समैरङ्कैः इति घनः)। हेमचन्द्र-कोश में लिखा है—

“संघे मुस्ते घनं मध्यनृत्तनादप्रभेदयोः।”

वर्गमूल और घनमूल।

आर्यभट्ट ने वर्ग और घन की एक एक रीति लिखी है जो कि ऊपर दिखला आए हैं पर वर्गमूल और घनमूल निकालने में क्रम से श्रीधर की (२) वर्गविधि और ब्रह्मगुप्त

की (२) घनविधि की उलटी क्रिया जो कि आज तक सब जगह प्रसिद्ध है, लिखी है।

ब्रह्मगुप्त ने वर्गरीति के ऐसा प्रसिद्ध समझ कर वर्गमूल निकालने की रीति नहीं लिखी पर घनमूल की वही रीति लिखी है जो कि आज कल प्रसिद्ध है।

श्रीधर ने अपनी त्रिशतिका (पाटीसार) में वर्गमूल और घनमूल की रीति, जो आज कल भी प्रसिद्ध है, लिखी है।

नारायणपंडित ने भी अपनी गणितकौमुदी में श्रीधर ही की रीति लिखी है।

यह सुन कर लोगों को बड़ा अचरज होगा कि युक्लेद (Euclid) को, जो कि रेखागणित का आचार्य समझा जाता है, अंको पर से वर्गमूल निकालने की रीति नहीं मालूम थी। उसे यह भी नहीं मालूम था कि त्रिभुज में लंब और भूमि के गुणनफल का आधा क्षेत्रफल होता है।

पुराने ग्रीस लोगों का अंकगणित और क्षेत्रफलों के ऊपर बहुत ही कम ध्यान था। आर्किमिडिज़ (Archimedes) ने वृत्त के फल के विचार में एक जगह लिखा है कि $\sqrt{3} < \frac{9}{5} < \frac{13}{7}$ और $\sqrt{3} > \frac{2}{1} < \frac{5}{3}$, पर यह नहीं दिखलाया कि ये दोनों मान कैसे निकले। जान पड़ता है कि उस समय अटककर से वर्गमूल निकाला जाता था। हिंदुओं की अंक लिखने की रीति न जानने से ही वे लोग अंकगणित में कच्चे थे।

संस्कृत में मूल जड़ को कहते हैं। मूल यह संस्कृत के मूल (प्रतिष्ठायां या रोहणे) धातु से क प्रत्यय करने से बना है।

वर्गमूल और घनमूल निकालने में लोग एक से नव तक के वर्ग और घन कंठ रखते हैं। किसी संस्कृत के ग्रंथ में

वर्ग-अवर्गस्थानों के और घन-अघन स्थानों के चिन्ह नहीं लिखे गए हैं पर गुरुपरंपरा से सब संस्कृत के गणक वर्ग और घन स्थान के लिये अंक के ऊपर खड़ी और अवर्ग और अघनस्थानों के ऊपर तिरछी रेखा लगाते हैं। जैसे ८८२०९ के वर्ग मूल जानने के लिये

$\begin{array}{r} 1-2-1 \\ 1-2-1 \end{array}$ ऐसी और १७२८ के घन मूल जानने के लिये $\begin{array}{r} 1-2-1 \\ 1-2-1 \end{array}$ ऐसी रेखा लगाते हैं।

श्रीधर ने अपनी त्रिशतिका में और भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती के क्षेत्रव्यवहार में अवर्ग (जिनका पूरा पूरा वर्गमूल नहीं मिलता) के आसन्नमूल निकालने की विधि लिखी है। कमलाकर ने स. १६५८ ई. में अपने तत्त्व-विवेक के स्पष्टाधिकार में अच्छी तरह से सिद्ध किया है कि अवर्ग का वर्गमूल न पूरा न भिन्न है खाली उसका मूल एक रेखा से दिखा सकते हैं पर उस रेखा को सही सही नाप नहीं सकते।

पैथागोरास (Pythagoras) का अनुयायी सिरेन का रहनेवाला थेओडोरास (Pythagorean Theodorus of Cyrene) ने खाली दृढ़ संख्याओं २, ३, ५, ७, ... के वर्गमूल को सिद्ध किया है कि न यह पूरा और न भिन्न ही संख्या है।

वेद और शुल्बसूत्रों के देखने से मालूम होता है कि आर्यभट्ट के हजारों वर्ष पहले से हिंदू लोग संख्या लिखने की यह प्रचलित रीति और जोड़ने, घटाने, गुणने, भाग लेने, वर्ग, घन, वर्गमूल और घनमूल की रीति जानते थे। मत-विरोधी होने से हिंदू वैदिक ब्राह्मणों ने बहुत बातें बौद्धों को नहीं बताई, शायद उन में से एक अंकगणित भी रहा हो इसी लिये अशोक के समय के लेखों में हिंदुओं की अंक रीति से संख्याएँ नहीं पाई जाती या उन लेखों के लिखनेवाले

गणक नहीं थे; क्योंकि गणक लोग ही अंकगणित में प्रधान थे। लल्ल, वराह, ब्रह्मगुप्त, ... ने अपने अपने ग्रंथों में शून्य का भी प्रयोग करते हैं। इस लिये नव अंकों के साथ साथ शून्य भी पैदा हुआ।

ऐसे अंक बनानेवाले महर्षि की जितनी स्तुति की जाय सब थोड़ी है। धन्य यह हिंदुस्तान जहाँ ऐसे महानुभाव का जन्म हुआ।

भिन्न-अंक या संख्या।

भिन्न के अंश और हर को कैसे लिखना इस की चर्चा संस्कृत के अंकगणितों में नहीं है पर न्यास के देखने से और गुरुपरंपरा से संस्कृत के गणक अंश के नीचे हर को लिखते हैं। वे लोग

$\frac{1}{2}$ को $\frac{1}{2}$ ऐसे और $\frac{2}{3}$ का $\frac{2}{3}$ ऐसे लिखते हैं। $\frac{3}{4}$ को

दो तृतीयांश कहेंगे। भास्कर ने लिखा है कि 'द्वौ त्र्यंशौ' याने एक के तृतीयांश को दो बेर लिया है। आज कल स्कूल के लड़के $\frac{2}{3}$ को दो भागा तीन या दो बटा तीन ऐसे बोलते हैं।

अरब के अलनसवी ने भी संस्कृत ही की रीति से $\frac{2}{3}$ इसे $\frac{2}{3}$ ऐसा लिखा है।

संस्कृत के पुराने ज्यौतिषी भिन्न के गणित को बहुत कठिन समझते थे। पर आर्यभट्ट के बहुत पहले से भिन्न के जोड़ने, घटाने, ... का हिंदुस्तान में प्रचार था इसी लिये आर्यभट्ट ने अपने आर्यभटीय के गणितपाद में भिन्न के जोड़ने, घटाने, गुणने और भाग को सहज समझ कर छोड़ दिया खाली भिन्न के वर्ग और घन को दिखलाया।

ब्रह्मगुप्त और श्रीधर ने सब की विधि लिखी है।

भिन्नोँ की समच्छेद विधि से, जो ब्रह्मगुप्त और श्रीधर ने दिखलाई है, साफ मालूम होता है कि इन लोगोँ को लघुतमापवर्त्य (*Least Common Multiple*) की विधि नहीं मालूम थी।

भास्कर ने अपवर्तित हरोँ से भिन्नोँ का समच्छेद करना लिखा पर इन्हें भी लघुतमापवर्त्य निकालने की क्रिया न मालूम हुई 'माणिक्याष्टकमिन्द्रनीलदशकं' इस उदाहरण के उत्तर में जो अभिन्न मान के लिये 'शेषैर्हते शेषवधे पृथक्स्थैः' यह रीति लिखी है उस से निश्चय है कि भास्कर को लघुतमापवर्त्य निकालने की रीति नहीं मालूम थी।

कमलाकर ने सन् १६५८ ई. में अपने तत्त्वविवेक के महाप्रश्नाध्याय में लघुतमापवर्त्य जानने के लिये रीति लिखी है (मेरा छपवाया सिद्धान्त तत्त्वविवेक देखो)।

यूरप में सब से पहले सन् १५२५ ई. में टार्टाग्लिआ (*Tartaglia*) ने लघुतमापवर्त्य की रीति लिखी है।

आर्यभट्ट, ब्रह्मगुप्त ... महत्तमापवर्तन की विधि जानते थे। यह बात उन लोगोँ के कुट्टाकार गणित से साफ है।

वे लोग भिन्नोँ के योग, अंतर, गुणन, भजन, वर्ग, वर्गमूल, घन और घनमूल की विधि जानते थे। वही विधि आज कल भी सब हिंदी के गणित की पोथियोँ में प्रचलित है।

किसी पूरी संख्या को भिन्न बनाने की जरूरत हो तो श्रीधर, भास्कर, ... ने लिखा है कि उस के नीचे एक का हर लगा दो (छेदनमच्छेदनस्य रूपं स्यात्, त्रिशतिका, पृ. ७)। जैसे ३ को भिन्न बनाना हो तो $\frac{3}{1}$ ऐसा लिख दो।

ग्रीक का भिन्न।

पहले लिख आए हैं कि पुराने ग्रीक अपनी वर्णमाला के

अक्षरोँ में स्वर लगा लगा कर उन से संख्याओँ को लिखते थे। इन के यहाँ अंश की एकाई पर एक स्वर लगा कर उस के आगे हर की एकाई पर दो स्वर लगा कर उस हर को दो बार लिख देते हैं। जैसे—

$\frac{1}{2}$ को वे लोग $\text{CV} \text{SV} \text{SV}$ ऐसे लिखेंगे। जहाँ अंश का मान $1=2$ रहता है वहाँ खाली हर की एकाई पर दो स्वर लगा कर उस हर को एक ही बार लिखते हैं जैसे $\frac{1}{2}$ को वे लोग CV ऐसा लिखेंगे। संस्कृत के गणितग्रंथों में भी यही रीति है। जहाँ अंश का मान १ रहता है वहाँ अंश का नाम नहीं लेते खाली हर का नाम लेने से समझ लिया जाता है कि अंश १ है। जैसे—

अर्ध से $\frac{1}{2}$, त्र्यंश या त्रिभाग से $\frac{1}{3}$, पाद, अंग्रि या चतुर्थ से $\frac{1}{4}$, पञ्चम से $\frac{1}{5}$ और षष्ठ से $\frac{1}{6}$ समझ लेते हैं (भास्कर की लीलावती में भिन्नपरिकर्माष्टक देखो)।

ज्यौतिषवेदांग के सोमाकर भाष्य में 'पञ्चदश' से $\frac{1}{15}$ लिया है।

(मेरा छपवाया ज्यौतिषवेदांग का १८ पृ. देखो)।

बोधायन ने अपने शुल्बसूत्र में इस तरह बहुत जगह भिन्नोँ को दिखलाया है।

“षष्ठ्या षष्ठ्या युतं द्वाभ्यां” इस वचन से मालूम होता है कि ज्यौतिषवेदांग के समय अपवर्तन देने की विधि नहीं मालूम थी पर ज्यौतिषवेदांग के पहले ही से लोगोँ को जोड़ना, घटाना, गुणना और भाग लेना मालूम था क्योंकि घाजुष और आर्च दोनों में युक्त, सहित, ऊन, गुणन और भाग के शब्द आते हैं।

पुराने संस्कृत के ज्यौतिषी कभी कभी 'अर्धपञ्चम'

याने पाँचवें का आधा इस से $8\frac{1}{2}$ लेते हैं (याजुष ज्यौतिष-वेदांग का १४ वाँ श्लोक देखो)।

इसी तरह अर्धचतुर्थ = $3\frac{1}{2}$ । अर्धषष्ठ = $5\frac{1}{2}$ ।

भिन्न यह संस्कृत के भिदिर् (विदारणे) धातु से कर्म में 'क्त' प्रत्यय करने से बना है (भिद्यते इति भिन्नः याने हिम्सा किया गया)।

विततभिन्न (Continued Fractions) संस्कृत के करणग्रंथों में दूसरी सूरत में पाए जाते हैं पर आज कल जो रूप प्रचलित है उस की जड लार्ड ब्रौकर (Lord Brouncker) हैं जिन का समय सन् (१६२०-१६८८) ई. है। ये रायल सोसाइटी (Royal society) के सभापति थे, वालिस (Wallis) के कहने से इन्होंने इस विततभिन्न को निकाला। अंत में इस से क्या फल होगा यह ब्रौकर को कुछ भी नहीं मालूम हुआ था।

उन्होंने π का मान जानने के लिये याने १ व्यास में परिधि का मान जानने के लिये एक जगह

$$\pi = \frac{3}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}} \text{ ऐसा लिखा है}$$

जिसे आज कल लोग जगह बचाने के लिये

$$\frac{3}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots}$$

ऐसा लिखते हैं। सन् १६१३ ई. में क्याटलडी (Cataldi) ने भी इस भिन्न का परिचय दिया था पर उन्होंने ने इस का कोई विशेष नाम नहीं रक्खा था।

एजिप्ट का भिन्न।

एजिप्ट देश के एक पुरोहित अहमेस (Ahmes) की बनाई एक पेड़ के छाल पर लिखी बहुत पुरानी एक अंक-गणित की पोथी मिली है।

रिंड (Rhind) साहेब ने ब्रिटिश अजायब खाने के लिये इस का संग्रह किया था। पीछे से सन् १८७७ ई. में ईसेनलोहर (Eisentrohr) ने पता लगाया कि यह गणित की पोथी है। इस के देखने से पता लगा है कि यह ईशामसीह के १७०० वर्ष पहले की है।

पोथी के देखने से मालूम होता है कि पढ़ने के समय गुरु ने अहमेस को जो जो हिसाब करा दिए थे उन्हीं को अहमेस ने याद रखने के लिये अपनी कापी में लिख लिया है। इस में कुछ अंकगणित, बीजगणित और रेखागणित के प्रश्न और उत्तर लिखे हैं।

अंकगणित के हिसाबों की क्रिया देखने से जान पड़ता है कि उस समय भिन्न का गणित बहुत कठिन समझा जाता था। किसी भिन्न के लिये पहले ऐसी क्रिया करते थे जिसमें वह ऐसे भिन्नो के योग के बराबर हो जाय जिनमें अंश १ रहे। जैसे—

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \quad \frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$$

उस पोथी में एक सारणी है जिसमें $\frac{2}{2n+1}$ ऐसे भिन्नो के (जहाँ n का मान १ से ले कर ४९ तक है) मान १ अंशवाले भिन्नो के योग में लिखे हैं। उस सारणी से बहुत भिन्न १ अंशवाले भिन्नो के योग के बराबर हो जाते हैं। जैसे $\frac{2}{3}$ इस में $\frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ तो

$$\frac{4}{21} = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{1}{21} \text{। सारणी से } \frac{2}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42} \text{।}$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } \frac{4}{21} &= \frac{1}{21} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42} + \frac{1}{42} + \frac{1}{42} \\ &= \frac{1}{21} + \frac{2}{14} + \frac{2}{21} = \frac{1}{21} + \frac{1}{7} + \frac{2}{21} = \frac{1}{7} + \frac{2}{21} \\ &= \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} \text{।} \end{aligned}$$

इस पोथी में जो हिसाब है वे बहुतों के मत से ईशा-मसीह के ३४०० वर्ष पहले के हैं। इस लिये एजिप्ट के लोग आज से पाँच हजार वर्ष पहले से गणित जानते थे इस बात का पता लगता है। उस पोथी के ऊपर लिखा है कि अँधेरी (कोठरी की) सब चीजों के जानने की राह (*Directions for obtaining the knowledge of all dark things*)।

यह राह की बोली संस्कृत के ग्रंथों में भी आती है। किसी पदार्थ का कुछ वर्णन कर के आचार्य लोग अंत में लिख देते हैं कि 'इति दिक्' याने जानने के लिये यही (दिशा=मार्ग) राह है।

इस पोथी से यह बात सिद्ध होती है कि एजिप्ट के लोग गणित की रीति निकालने में बहुत कच्चे थे।

जौँ $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ तो $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$ । इस में जौँ $r = 4$ तो $y = 84$ ।

$$\text{इस लिये } \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{और ऊपर लिखे y के मान में जौँ $r = 6$ तो $y = 12$ ।}$$

$$\text{इस लिये } \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{और } \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \dots \dots \dots (3)$$

जौँ अहमस को बराबर के दो भिन्नो के मान न दर्कार हुए हों तो (३) इसे छोड़ सकते हैं पर अहमस ने (१) छोड़ कर (२) को क्यों लिया इस का कारण नहीं मालूम होता है।

$$\frac{2}{2n+1} \text{ ऐसे भिन्नो को १ अंशवाले दो भिन्नो के}$$

बराबर करना तो कुछ कठिन नहीं क्योंकि

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(2n+1)(n+1)} \text{ पर न जाने क्यों अहमस ने}$$

कहीं कहीं कई १ अंशवाले भिन्नो के योग के बराबर और

$$\text{कहीं कहीं } \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(2n+1)(n+1)} \text{ इन भिन्नो से भिन्न}$$

भिन्नो को दिखलाया है।

जैसे ऊपर की युक्ति से

$$\frac{2}{40} = \frac{2}{2 \cdot 20 + 1} = \frac{1}{20} + \frac{1}{40 \cdot 20} = \frac{1}{20} + \frac{1}{800} \text{ पर}$$

$$\text{अहमस ने } \frac{2}{40} + \frac{1}{40 \cdot 20} = \frac{1}{20} \cdot \frac{2}{20} = \frac{1}{20} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20} \right)$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{20} \text{ ऐसा अपनी सारणी में लिखा है। इसी}$$

$$\text{तरह अहमस की सारणी में } \frac{2}{20} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} \text{ ऐसा लिखा है।}$$

बीज के एकवर्णसमीकरण के भी कुछ प्रश्न, जिन के उत्तर संस्कृत अंकगणित के दृष्टकर्म से हो जाते हैं, उत्तर सहित उस में हैं। जैसे वह कौन संख्या है जिस में उसी का सातवाँ भाग मिला देने से १९ होता है। इस के उत्तर निकालने में अहमस ने $y + y = 19$ $\therefore \frac{2y}{2} = 19$ $\therefore y = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ और

$$y = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ लिखा है। अहमस ने अव्यक्त को}$$

हौ या हीप (*hau or heap*) कहा है।

और और प्रश्नों के उत्तर जुदी जुदी रीति से निकाले गए हैं। एक जगह अहमस ने 'अ' संख्या को ९ गुना इस तरह से किया है, पहले अ को दुगुना किया फिर इस दुगुने को दूना किया फिर इस चौगुने को दूना कर इस में अ को मिला दिया।

$$\text{इस पोथी में दो भाग हैं। पहले में भिन्नो को } \frac{2}{2n+1}$$

अँगरेजी अनुवाद छापा उस समय उस पोथी में लिखे हुए दशमलव को उन्होंने ने शुद्ध किया था। पहले लिख चुके हैं कि स. १६१९ ई. से स. १६३१ ई. तक की अँगरेजी पोथियों में कहीं भी दशमलव की चर्चा नहीं है। ब्रिगज (Briggs) ने नीचे तिरछी रेखा दे कर दशमलव को लिखा है।

जैसे २.५७ को उन्होंने ने २५७ ऐसे लिखा है। सन् १६३१ ई. में औट्रेड (Oughtred) ने ५६ को ०।५६ ऐसा लिखा है। स्टेविन (Stevin) के एक विद्यार्थी आलबर्ट गिरार्ड (Albert Girard) ने स. १६२९ ई. में एक जगह दशमलव के बिंदु को लिखा है पर इस के बाद उस ने अपने बीजगणित में सब जगह दशमलव का व्यवहार किया है। डि मार्गन (De Morgan) साहब लिखते हैं कि सन् १७७५ ई. के बाद दशमलव की सब जगह जीत हुई; सब लोगो ने इस की इज्जत की।

जौ विचार कर देखो तो प्रचलित दशगुने स्थानों से जो संख्या लिखी जाती है उस की छोटी बहिन दशमलव संख्या है क्योंकि इस में सब अंक दशमांश स्थानों के रहते हैं इस लिये बड़ी बहिन ने जब दर्शनी से साठ साठ हिस्सेवाली विजातीय संख्या को हटा कर अपनी छोटी बहिन को अपनी बाईं ओर बैठा लिया।

क्यांटर (Cantor) के मत से पिटिस्कस (Pitiscus) ने स. १६१८ ई. में सब से पहले अपनी त्रिकोणमिति की सारणी में दशमलव का व्यवहार किया।

गर्हार्ड (Gerhardt) का मत है कि रडोल्फ (Rudolf) को भी दशमलवगणित मालूम था। भाग लेने में जहाँ भाजक का मान दश का कोई घात है वहाँ घातसंख्या के बराबर एकाई से बाईं ओर भाज्य के अंकों को गिन कर उस जगह ',' कामा का निशान लगा देते थे।

सुना जाता है कि स्टेविन (Stevin) ने, जिस के विद्यार्थी ने दशमलवबिंदु का प्रचार किया, दशमलव के अंकों को एकाई, दहाई, ... के ऐसा दशवाँ (Tenths), सौवाँ (Hundredths), हजारवाँ (Thousandths), ... हिस्सों को क्रम से पहला, (Primes), दूसरा (Sekondes), तीसरा (Terzes), ... इस नाम से प्रसिद्ध किया था। उस ने ४.६२८ को ४(०) ६(१) २(२) ८(३) ऐसा लिखा है। केप्लर (Kepler) भी बिंदु की जगह कामा रखते थे।

बहुत लोग कहते हैं कि स्टेविन (Stevin) की रीति को बिना देखे जूस्ट बर्गी (Joost Bürgi) ने अपनी जीवा की सारणी में आज कल के ऐसा दशमलव को बिंदु दे कर लिखा है जैसे ०.३२ और ३.२।

इस दशमलव को पैदा हुए बहुत दिन नहीं हुए थे पर तो भी बहुत काम का समझ कर लोगो ने झट अपनी अपनी पोथियों में आदर के साथ इस के बैठने के लिये जगह दी। बापूदेव-शास्त्री जी के समय से इस तरफ संस्कृत में भी दशमलव का व्यवहार होने लगा है।

चिह्न।

संस्कृत अंकगणितग्रंथों में जोड़ने, घटाने, गुणने और भाग के कोई चिह्न नहीं मिलते। पोथियों में उस के नाम के आगे उस संख्या को लिख देते हैं। जैसे वियोज्य १५२०, वियोजक ५२०। गुण्य १३५, गुणक १२। भाज्य १६२०, भाजक १२।

बीजगणित में ऋणसंख्या दिखलाने के लिये भास्कर ने लिखा है कि उसके शिर के ऊपर एक बिंदु रख दो। जैसे

$-2=2$ । और मूल के लिये करणी का 'क' लिखा है।
जैसे $\sqrt{3}=3$ ।

और बीजगणित के चिह्न बीजगणित-भाग में लिखे जायेंगे।

ग्रीक डाइओफांटस (*Diophantus*) ने जो स. ३०३ ई. के लगभग मरे, ऋण के लिये η , बराबर के लिये ϵ और अव्यक्तराशि के लिये ς ये चिह्न मान लिए थे। और चिह्न उन की पोथी में नहीं मिलते।

अहमैस ने अपनी पोथी में आगे चलते हुए आदमी की दोनों टाँगों की जैसी सूरत होती है उसे धन की जगह और पाँछे की ओर चलने में उन टाँगों की जैसी सूरत होती है उसे ऋण की जगह रक्खा है। उन्होंने ऋण के लिये कहीं कहीं तीन समानांतर तीर के \equiv ऐसे निशान बना दिए हैं और बराबर के लिये \simeq ऐसा चिह्न बनाया है।

विडम्यान (*John Widmann*) के अंकगणित में जो स. १४८९ ई. में लिपज़िग (*Leipzig*) में छपा है, धन और ऋण के चिह्न क्रम से $+$ और $-$ पाए जाते हैं। उस समय धन चिह्न में खड़ी रेखा तिरछी रेखा से कुछ छोटी रहती थी।

जर्मनी के स्टीफेल (*Stifel*) ने अंकगणित पर एक अरिथमेटिका इंटेग्रा (*Arithmetica Integra*) नाम की पोथी लिखी है जो कि सन् १५४४ ई. में न्यूरम्बर्ग (*Nuremberg*) में छपी है, उस में भी धन और ऋण के चिह्न वैसे ही हैं जैसे कि विडम्यान (*Widmann*) की पोथी में हैं। पर पाँछे से कसाइलेंडर (*Xylander*) ने स. १५७५ ई. में धन चिह्न की खड़ी रेखा तिरछी रेखा से बहुत बड़ी की है, $+$ इस तरह से।

बहुत लोगों के विचार से स्टीफेल (*Stifel*) ही पहले पहल इन दोनों चिह्नों के बनानेवाले हैं। बहुत लोगों का अनुमान है कि ये दोनों चिह्न किसी शब्द के पहले अक्षर की बिगड़ी सूरत नहीं हैं; ये दोनों एक तरह के चिह्न बना लिए गए हैं।

बहुत लोग $+$ इस को एक तरह की हाथ की सूरत बताते हैं पर मेरी समझ में यह 'additorum' के पहले अक्षर a की बिगड़ी सूरत और $-$ यह ऋणचिह्न 'Subtractorum' के पहले अक्षर s की बिगड़ी सूरत है जैसे 'radix' के पहले अक्षर r की बिगड़ी सूरत मूल का चिह्न $\sqrt{}$ यह है जिसे पहले पहल स्टीफेल (*Stifel*) ने लिखा है। बहुतों का मत है कि ये दोनों 'Plus' और 'Minus' के पहले अक्षर 'p' और 'm' के उस समय के रूप की बिगड़ी सूरत हैं।

प्रोफेसर डि मार्गन (*De Morgan*) का मत है कि हिंदुओं के ऋणचिह्न $-$ की — यह एक बड़ी सूरत है। फिर पीछे से इस का उलटा याने धनचिह्न दिखाने के लिये इस — ऋणचिह्न को खड़ी रेखा से काट कर $+$ ऐसा बनाया गया। डि मार्गन ने इस बात को स. १८४७ ई. में अपनी गणितसंबन्धि-पोथी के १९ वें पृ. में लिखी है। यह वही डि मार्गन साहब हैं जिन्होंने दिल्ली के रहनेवाले लालारामचंद्र की म्याकज़िमा और मिनिमा (*Maxima and Minima*) को यूरोप में छपवाया था। यूरोप में मर्दुश्शुमारी की भी चाल इन्हीं ने निकाली थी।

बहुतों का मत है कि दो आदमियों के बीच में एक आदमी खड़ा हो कर एक एक हाथ से दोनों को अपने पास मिलाने के लिये जिस तरह से बुलाता है उसी की $+$ यह एक तरह की सूरत है, खड़ी रेखा शिर और पीठ के बीच की बिगड़ी सूरत और

तिरछी रेखा दोनों हाथों की बिगड़ी सूरत है।

बहुत लोग कहते हैं कि जर्मन लोगों (Germans) ने इन धन-ऋण चिह्नों को सब से पहले बनाया है।

जो हो पर पहले पहल इन दोनों चिह्नों का व्यवहार बनिओ में होता था। वैटा (Vieta) के समय से सब लोग गणित के सुभीते के लिये खुशी से इन का व्यवहार करने लगे।

राबर्ट रेकार्ड (Robert Recorde) ने स. १५४० ई. में, यह विचार कर कि दो समानांतर रेखाओं ही में सब से ज्यादा बराबरी है, बराबर का = यह चिह्न बनाया है। राबर्ट रिकार्ड का बीजगणित (The Whetstone of Wille) जो सन् १५५७ ई. में बना है, अंगरेजी के सब बीजगणितों में पहला है।

जान हेनरिक राइन (Johann Heinrich Rohn) ने सन् १६५९ ई. में भाग के लिये \div इस चिह्न को बनाया जिसे इंग्ल्यांड में जान पेल (John Pell) ने स. १६६८ ई. में प्रचार किया।

वैटा (Vieta) ने जो बीज में वर्णमाला के बड़े अक्षरों को लिया था, वहाँ पर जगह बचाने के लिये, हारिओट (Harriot) ने छोटे अक्षरों को लिया और बड़े और छोटे के लिये \rhd और \lhd ये चिह्न बनाए। हारिओट (Harriot) के मरने के दश वर्ष बाद उस का बीज *Artis Analyticae praxis* सन् १६३१ ई. में छापा गया।

विलियम औट्रेड (William Oughtred) ने सन् (१५७४-१६६०) ई. में गुणन का चिह्न \times और अनुपात दिखाने का चिह्न $::$ ऐसा बनाया। उन्हीं ने निष्पत्ति के लिये \therefore ऐसा चिह्न माना था जिसे पीछे से अठारहवीं सदी में

क्रिस्चियन वोल्फ (Christian Wolf) ने गुणन के लिये और $:$ इसे निष्पत्ति के लिये मान लिया। बहुत लोग यह कहते हैं कि औट्रेड (Oughtred) और हारिओट (Harriot) दोनों ने सन् १६३१ ई. में \times इस गुणन और $::$ इस निष्पत्ति चिह्न को व्यवहार में लाए।

पासिओलि (Pacioli) और टार्टाग्लिआ (Tartaglia) दोनों ने — इस ऋण चिह्न को भाग, निष्पत्ति और अनुपात में व्यवहार किया।

बहुतों का मत है कि डिकार्टेस (Descartes) ने सन् १६३७ ई. में गुणन के लिये \cdot इस बिंदु को ले लिया है।

लेबनिज़ (Leibnitz) ने सन् १६८६ ई. में गुणन के लिये \sim इस चिह्न को और भाग के लिये इस के उलटे \sim इस को रक्खा है।

कभी कभी अरब के लोग अंश और हर के बीच एक तिरछी रेखा रख देते थे जैसे $९-३ = \frac{९}{३}$ । कभी कभी वे लोग $\frac{९}{३}$ को $९/३$ इस तरह से भी लिखते थे।

क्लैरौट (Clairaut) ने सन् १७६० ई. में एक पोथी छापी है उस में भी निष्पत्ति के लिये $:$ यह चिह्न है।

जोड़ने ही की एक विशेष क्रिया को गुणन कहते हैं इस लिये जोड़ने ही के $+$ इस चिह्न का एक विशेष रूप \times यह गुणन चिह्न माना गया और घटाने ही की एक विशेष क्रिया भाग है इस लिये घटाने ही के $-$ इस चिह्न में नीचे ऊपर एक एक बिंदु दे कर उस का विशेष रूप \div यह भागचिह्न माना गया, ऐसा समझ पड़ता है।

बहुत लोग कहते हैं पहले पहल पेल (Pell) ने इस चिह्न का सन् १६३० ई. में प्रचार किया। बहुतों का मत है कि पहले

भाग का चिह्न \div ऐसा था इसी की विगड़ी सूरत आज कल का \div यह भाग चिह्न हो गया।

रिकार्ड ने बराबर का $=$ यह चिह्न निकाला और वसाइ-लेंडर (*Uylander*) ने भी सन् १५७५ ई. में इसी का व्यवहार किया पर न्यूटन (*Newton*) तक इस का प्रचार बहुत कम था। न्यूटन ने सन् १६८० ई. में बराबर के लिये ∞ यह या इस का उलटा ∞ यह लिया है। यह *aequalis* के पहले अक्षर की विगड़ी सूरत मालूम होती है।

वैटा (*Vieta*) ने इस $=$ बराबर के चिह्न को अंतर के लिये रक्खा है। Δ इस का अ Δ क यह अर्थ किया है याने बड़ी संख्या जो हो उस में छोटी घटाई गई है।

औट्रेड (*Oughtred*) ने अनुपात चिह्न को बनाया सही पर व्यवहार में इस का सब जगह प्रचार वालिस (*Wallis*) ने सन् १६८६ ई. में किया।

बराबर के $=$ इस चिह्न से दूसरा अनुपात के चिह्न के बनाने की कुछ जरूरत न थी। क्योंकि Δ क $=$ खः ग इस का वही अर्थ होगा जो कि Δ क :: खः ग का है।

औट्रेड (*Oughtred*) ने पहले बड़े और छोटे के लिये \sqsupset और \sqsubset ये चिह्न बनाए थे पीछे से हरिओट (*Harriot*) ने इन्हीं की कुछ सूरत बदल कर $>$ और $<$ ऐसा कर दिया जो कि बारो (*Barron*) के बाद सब जगह जारी हुए हैं।

\neq (नहीं बराबर), \nless (नहीं बड़ा) और \nless (नहीं छोटा) ये चिह्न बहुत थोड़े दिनों से जारी हुए हैं।

सन् १५९१ ई. में वैटा *Vieta* ने (*Vinculum*) का और सन् १६२९ ई. में गिरार्ड (*Girard*) ने कोष्ठ (*Brackets*) का प्रचार किया। जान वालिस (*John*

Wallis) ने जो सन् १६४९ में आक्सफोर्ड में रेखागणित के प्रोफेसर हुए थे अनंत का याने $\frac{2}{1}$ इस का ∞ यह चिह्न बनाया। मुसलमानी राज के समय से हिंदुस्तान में आना, छटाँक, सेरं, तोला, मासा, ... के चिह्न बने हैं जो कि सब जगह प्रसिद्ध हैं। बाकी बीजगणित के चिह्नों का वर्णन बीजगणित के भाग में किया जायगा।

दृढ़ संख्या।

आर्यभट्ट ने अपने आर्यभटीय के कुट्टाकार में दृढ़-भाज्य-हार की कुछ चर्चा नहीं की।

इन के शिष्य प्रभाकर, ... की अंकगणित की पोथि-आँ अभी तक नहीं मिलीं। आर्यभटीय के टीकाकार परमेश्वर के वचन से (गणकतरङ्गिणी देखो) आर्यभट्ट के एक शिष्य लल्ल भी हैं जिन्हें आदर के लिये लोग लल्लाचार्य कहते हैं। भास्कराचार्य इन के गोलपृष्ठफल के खंडन में अपने गोल-लाघ्याय में लिखते हैं कि “तर्हि तेन लल्लेन स्वगणिते परिधिं कुतः कुतम्” इस से साफ है कि लल्ल का अंकगणित भी है। मेरे गुरु पं. श्री देवकृष्णमिश्र जी ने पढ़ने के समय मुझ से कई बार कहा था कि बनारस-संस्कृतकालेज के पुस्तकालय में लल्ल का व्यक्तगणित (अंकगणित) था पर न जाने क्या हुआ। वे मुझ से यह भी कहते थे कि उसी पोथी में मैंने “अङ्कानां वामतो गतिः” इस को देखा था।

जो कुछ हो पर लल्ल के अंकगणित होने में कुछ संशय नहीं। लल्ल ने महत्तमापवर्त्तन से भाज्य-हार में भाग दे कर नए भाज्य-हारों का क्या नाम रक्खा इस का पता उन की पोथी के न मिलने से नहीं लग सकता।

ब्रह्मगुप्त ने अपने ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त के कुछका-
ध्याय में महत्तमापवर्त्तन से भाज्य-हार में भाग दे कर
उन दोनों का नाम निश्छेद भाज्य-हर रक्खा है।

उन के बाद भट्टवलभद्र, श्रीपति, श्रीधर, पद्म-
नाभ, ... के पुराने कोई अंकगणित के ग्रंथ नहीं मिलते।

यह तो निश्चय है कि श्रीपति का अंकगणित है (गणक-
तरङ्गिणी देखो) पर जैसे उन का 'सिद्धान्तशेखर' नहीं मिलता
उसी तरह उन का अंकगणित भी दुर्लभ हो गया।

श्रीधर की बड़ी पाटी नहीं मिलती, छोटी पाटी त्रि-
शक्तिका (पाटीसार) में कुछप्रकरण ही नहीं है।

भास्कर ने अपनी पाटी लीलावती के कुछव्यव-
हार में महत्तमापवर्त्तन से भाग दे कर भाज्य-हार का
नाम दृढ भाज्य-हार रक्खा है।

ब्रह्मगुप्त का 'निश्छेद' ही भास्कर का दृढ है। भा-
स्कर के बाद के ज्यौतिषियों ने 'दृढ' का व्यवहार किया है।
गणेश ने सन् १५२० ई. में अपने ग्रहलाघव के आदि ही
में लिखा है कि 'दृढगुणहारलसत्'।

इस तरह से पुराने संस्कृत के गणित-ग्रंथों में खाली
दृढ भाज्य-हार का पता लगता है। पर दृढ संख्या किसे कहते हैं
इस की चर्चा संस्कृत में केवल नारायण पंडित ने अपनी गणित-
कौमुदी में की है, उन्होंने ने दृढ को अच्छे से लिखा है। पीछे से ज-
यपुर राजा के जगन्नाथपंडित (गणकतरङ्गिणी देखो) ने अपने
रेखागणित के ७-९ अध्यायों में दृढ का बहुत सिद्धान्त लिखा
है। यह अरबी रेखागणित का संस्कृत में अनुवाद है। गवर्नमेंट की
ओर से बंबे संस्कृत सीरिज में छप भी गया है। जगन्नाथ
पंडित ने सन् १७१८ ई. में इस अनुवाद को पूरा किया है।

युक्लेद (Euclid) ईशामसीह के ३०० वर्ष पहले
हुए हैं। इन्होंने अपने गुरुओं के और अपने प्रकारों का संग्रह
कर इस रेखागणित को बनाया है इस लिये अब इस बात का पता
लगाना बहुत कठिन है कि दृढसंख्याओं के सिद्धान्त युक्लेद के
या उन के गुरुओं के निकाले हैं।

इस बात का पता लगता है कि दृढसंख्याओं के सिद्धान्तों
को छोड़ कर बाकी सब पैथागोरास (Pythagoras)
के शिष्य परंपराओं के निकाले हुए हैं।

युक्लेद के पीछे दो नामी आदमी ऐसे हुए जो कि अंक-
गणित की ओर विशेष ध्यान दिए हैं।

एराटोस्थेनेस (Eratosthenes) ने ईशामसीह
के २७५-१९४ वर्ष पहले दृढसंख्याओं के जानने की रीति
लिखी है।

उस ने लिखा है कि जौ यह जानना हो कि १०० के भीतर
कितनी दृढसंख्या हैं तो ३, ५, ७, ९, ..., ९९ ऐसे १०० के
भीतर विषमसंख्याओं को लिख डालो। फिर जितनी तीसरी
तीसरी संख्याएँ ३ से अपवर्त्तित हों सब पर चिह्न लगा दो, फिर
पाँच से पाँचवीं पाँचवीं जितनी अपवर्त्तित हों उन पर
चिह्न लगा दो। इसी तरह ७, ११, ... से विना चिह्नवाली संख्याओं
से आगे जो जो संख्याएँ अपवर्त्तित हों उन पर चिह्न लगाते
जाओ। इस तरह करने पर जो विना चिह्न की रह जायँ वे १०० के
भीतर में दृढसंख्याएँ हैं।

जैसे हिंदुओं में 'तीन तिकट महाविकट' 'चार
चंद्र काला'... ऐसे संख्याओं पर से सगुन विचारते हैं उसी तरह
अरिस्टोटल (Aristotel = अरस्तू) और उन के अनुयायी
भी संख्याओं पर से सगुन विचारते थे। इस बात का पता प्लेटो

(*Plato*) के ग्रंथ से लगता है ।

युक्लेद (*Euclid*) को $1+2+3+4+\dots$ इस गुणोत्तर श्रेणी के योग करने की रीति मालूम थी । युक्लेद ने यह भी दिखलाया है कि ऊपर की गुणोत्तर श्रेणी में जिस पद तक का योग दृढसंख्या हो तो उस योग को श्रेणी की अंतवाली संख्या से गुण देने से निधि (*Perfect*) संख्या होती है ।

(जो संख्या अपने निःशेष करनेवाले भाजकों के योग के बराबर हो उस का नाम जगन्नाथ पंडित ने अपने रेखागणित के ७वें अध्याय की परिभाषा में 'निधि' रक्खा है । जैसे ६ को निःशेष करनेवाले भाजक १, २, ३, हैं और

$$1+2+3=6, \text{ इस लिये ६ को निधि कहेंगे ।)}$$

जैसे $1+2=3$ यह दृढ है इस लिये इसे अंतवाली संख्या २ से गुण देने से ६ निधिसंख्या हुई । इसी तरह

$1+2+3=6$ यह दृढ है इस लिये इसे श्रेणी की अंत्य संख्या ३ से गुण देने से १८ निधिसंख्या हुई ।

इस तरह से आज तक ६, २८, ४९६, ८१२८, ३३५५०३३६, ८५८९८६९०५६, १३७४३८६९१३२८, २३०५८४३००८१३९९५२१२८ इतनी निधिसंख्याएँ जानी गई हैं । आगे श्रेणी के पदों का योग दृढ है या नहीं इस के पता लगाने में बड़ी मेहनत है इस लिये लोगोंने आगे नहीं पता लगाया । मैंने अपने 'वास्तवविचित्रप्रश्न' में इस निधिसंख्या के जानने की रीति लिखी है जिस की उपपत्ति बीजगणित से होती है ।

युक्लेद को $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ इस अनंत श्रेणी का योग $\frac{2}{1}$ मालूम था । उस ने परवलय (*Parabola*) के क्षेत्रफल के लिये इस श्रेणी का योग निकाला था (मेरा चरित्राशिकलन देखो) ।

पैथागोरास (*Pythagoras*) के स्कूल के पंडितों ने यमल, युग्म, युग या जोड़ुओं दो संख्याओं को भी निकाला है । पहली संख्या के निःशेष करनेवाले भाजकों का योग दूसरी संख्या और दूसरी संख्या के निःशेष करनेवाले भाजकों का योग पहली संख्या हो तो ऐसी दो संख्याओं को युगसंख्या कहते हैं ।

जैसे— २२० के निःशेष करनेवाले भाजकों का

$$\text{योग} = 1+2+3+4+5+10+11+20+22+33+44+55+66+77+88+110+132+165+220 = 208 = \text{दूसरी संख्या और २०८ के निःशेष करनेवाले भाजकों का}$$

$$\text{योग} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20 = 210 = \text{पहली संख्या।}$$

इस लिये २२० और २०८ ये दोनों युगसंख्या हुई ।

खलीफा अलमनून जिस समय बगदाद में राज करते थे उस समय मूसा बिन सकीर नाम के एक मौलवी थे । ये विद्या के बड़े चाही थे । उन्हें तीन लड़के हुए । ये तीनों अपने बाप की शिक्षा से बहुत भाषा के पंडित हुए । इन लोगों के बनाए बहुत ग्रंथ हैं । सुनने में आता है कि एक भाई गणित की पोथियों की खोज करने के लिये ग्रीस में गया था । उस ने लैटिनी बेरा तबित बिन कोरी से, जो कि सन् (८३६-९०१) ई. में मेसोपोटामिया (*Mesopotamia*) के हर्न (*Harran*) स्थान में पैदा हुए थे, भेंट की थी । उस ने खलीफा से तारीफ कर के तबित को बगदाद में बुलवाया । खलीफा ने बड़ी इज्जत के साथ उन्हें अपने दरबार का प्रधान ज्यौनिषी बनाया । ये खलीफा गणित ही के पंडित न थे बल्कि ग्रीक, अरबी, साइरियन (*Syrian*) भाषा के भी बड़े पंडित थे । अरब-वालों में यही एक ऐसे आदमी जान पड़ते हैं जिन के मन में

बहुत नई बातें पैदा हुईं। ये पाइथागोरास (Pythagoras) के स्कूल के पंडितों के बहुत दृढसंख्याओं के सिद्धान्त को भी जानते थे इसमें कुछ भी संशय नहीं क्योंकि युगसंख्या की परिभाषा से ये अच्छी तरह बाकिफ थे तब तो इन के जानने की रीति निकाली।

उन की रीति यह है—

जौं $p = 2 \cdot 2^n - 1$, $f = 2 \cdot 2^{n-1} - 1$, $b = 2 \cdot 2^{n-1} - 1$,
(न पूरी और धनसंख्या है) ये दृढ हों तो

$a = 2^n \cdot p \cdot f$, $k = 2^n \cdot b$ ये दोनों युगसंख्या होंगी।

जैसे जौं $n = 2$ तो $p = 11$, $f = 1$, $b = 1$, ये सब दृढ हैं इस लिये

$a = 220$ और $k = 208$ ये दोनों युगसंख्या हुईं।

इस तरह आज तक 220, 208। 17296, 17296। 9363423, 9363423। ये तीन युगसंख्या जानी गई हैं।

ताबित ने एक दिए हुए कोण के सम त्रिभाग करने की भी रीति लिखी है।

संस्कृत के किसी गणित के ग्रंथों में युगसंख्या की चर्चा नहीं है।

दूसरे देश के लोगों ने दृढसंख्या के ऊपर बहुत कुछ सिद्धान्त लिखे हैं जिन का संस्कृत में किया हुआ मेरा अनुवाद भी है (चौखंभा-संस्कृतसीरिज में छपा करणप्रकाश देखो)।

दृढसंख्या अनंत है इस बात को यूक्लिड (Euclid) ने अपने रेखागणित के नवें अध्याय में सिद्ध किया है।

इस दृढ के जानने के लिये बहुतों ने अनेक प्रकार बनाए पर सब आगे जा कर अशुद्ध हो जाते हैं।

एक ने लिखा है कि $2^n - 1$ यह दृढसंख्या है।

इसमें जब $n = 8$ तो $2^8 - 1 = 255$ यह दृढ नहीं है।

सन् १६४० ई. में फरम्याट (Fermat) ने अपनी एक चीठी में एक बहुत बढिआँ दृढसंख्या के ऊपर सिद्धान्त लिखा है जिसे आज कल लोग फरम्याट का सिद्धान्त (Fermat's theorem) कहते हैं।

जौं p दृढसंख्या हो और a और p आपस में दृढ हों तो $a^{p-1} - 1$, यह p से निःशेष होगा याने p के भाग देने से कुछ भी बाकी न बचेगा यही फरम्याट का सिद्धान्त है (करण-प्रकाश देखो)।

फरम्याट ने दृढसंख्या जानने के लिये भी एक $2^{2^n} + 1$ यह प्रकार निकाला।

फरम्याट अपने दोनों प्रकारों की उपपत्ति न दिखा सका।

पहले प्रकार की उपपत्ति पीछे से यूलर (Euler) ने की है (करण-प्रकाश देखो)।

फरम्याट को मरने तक पूरा विश्वास था कि मैंने दृढसंख्या जानने का $2^{2^n} + 1$ यह ठीक प्रकार निकाला है पर मैं इस की उपपत्ति न कर सका।

एक अमेरिकन लडके ने जिस का नाम जेरा कोल्बर्न (Zerah Colburn) था, इस बात का पता लगाया कि जब फरम्याट के प्रकार में $n = 5$ तो $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967296 = 641 \times 670041601$ । ऐसा होता है इस लिये इस प्रकार से सब दृढांक ही नहीं पैदा होंगे।

लडके के मन में 641 कैसे आया इस बात को वह नहीं

बता सका। फिर पीछे से यूलर (Euler) ने इसी उदाहरण को दिखा कर साबित कर दिया कि फरम्याट का प्रकार ठीक नहीं।

फरम्याट को आज कल के प्रचलित दृढांक सिद्धांतों का मूलपुरुष कहना चाहिए पर न जाने क्यों फरम्याट अपने प्रकारों को तो लोगों में मशहूर कर देता था पर उपपत्ति को छिपा रखता जिस से और गणकों का नाहक उपपत्ति सोचने में वक्त खराब होता था। यही चाल संस्कृत के गणकों में भी थी पर मैंने अब इस चाल को उठा दी।

एक फरासीसी व्याकेट ड मेज़िरियाक (Bachel de Méziriac) ने सन् १६१२ ई. में डाइओफांटस (Diophantus) के गणित के ग्रंथ को छपवाया था। फरम्याट को उस की एक प्रति मिली थी, उसी के पन्नों के हाशिए पर उस ने अपने प्रकारों को टिप्पणी की तरह लिख डाला था। फरम्याट के मरने के बाद उस के लड़के ने अपने बाप की टिप्पणी के साथ डाइओफांटस के उस ग्रंथ को फिर से छपवा दिया। फरम्याट के और प्रकारों को भी उस के लड़के ने ओपरा वयारिआ (Opera Varia) और वालिस के कमर्शियम एपिस्टोलिकम् (Commercium epistolicum) में सन् १६५८ ई. में छपवा दिया।

फरम्याट की टिप्पणी के कुछ प्रश्न —

(१) सिद्ध करो कि $y^n + z^n = l^n$, इस में जौ $n > 2$ तो समीकरण असंभव है।

इस पर फरम्याट ने टिप्पणी लिखी है कि मैंने उपपत्ति से सिद्ध किया है पर हाशिए पर जगह कम है इस लिये उपपत्ति को नहीं लिखा।

यही प्रश्न पीछे से गणकों के बीच में 'इनामी सवाल'

हो गया याने जो इस का उत्तर करे वह इनाम पावे।

यूलर (Euler), ल्याग्रेंज (Lagrange), डिरिक्लेट (Dirichlet) और कुम्बर (Kummer) ये लोग इस के पीछे बड़े हैरान हुए थे। यूलर ने जब $n=3$ तब इसे असंभव सिद्ध किया। ल्याग्रेंज ने जब $n=4$ तब असंभव सिद्ध किया। कुम्बर ने कुछ न मानों को छोड़ कर और सब मानों में असंभवता दिसाई है पर कुम्बर की उपपत्ति में बहुत संशय है इस लिये अभी तक इस प्रश्न का उत्तर बाकी है।

(२) $8n+1$ यह जौ दृढ अंक हो तो यहाँ एक ही जात्य-त्रिभुज में कर्ण, इस का वर्ग दो जात्यत्रिभुजों में कर्ण, इस का घन तीन जात्यत्रिभुजों में कर्ण, और इसी तरह इस का n घात n जात्यत्रिभुजों में कर्ण होगा।

जैसे— जौ $n=1$ तो $8n+1=9$ यह दृढ हुआ तो

$8^2 + 3^2 = 9^2$, इस लिये जिस जात्य का भु = ३, को = ४ उसी में ५ यह कर्ण होगा। दूसरा कोई ऐसा जात्य नहीं हो सकता जिस के अकरणगीगत भुज-कोटि में यह ५ कर्ण हो।

५ का वर्ग २५ यह—

$25^2 = 15^2 + 20^2 = 9^2 + 28^2$ इस लिये दो जात्यो में कर्ण होता है। इसी तरह $5^2 = 125$ यह—

$125^2 = 95^2 + 100^2 = 35^2 + 120^2 = 88^2 + 119^2$, इस लिये तीन जात्यो में कर्ण होता है।

(३) जो दृढसंख्या $8n+1$ इस चाल की है वे कोई निश्चित दो ही संख्याओं के वर्गयोग के बराबर होंगी हैं।

जैसे—

जौ $n=1$ तो $8n+1=9$ यह १ और २ के वर्गयोग के

बराबर है। इन दोनों को छोड़ कर ऐसी कोई और दो पूरी संख्या नहीं जिन के वर्गों का योग ५ के बराबर हो। इस की उपपत्ति यूलर (Euler) ने की है। वह इस तरह से है—

१। $पा = अ \cdot य^n + क_1 \cdot य^{n-1} + क_2 \cdot य^{n-2} + \dots + क_n$ ऐसा बीज का बहुपद हो और $म$ एक दृढसंख्या हो तो $य$ के स्थान में $-म$, $१-म$, \dots , ० , १ , २ , \dots , $म$, इन के भीतर $न$ से अधिक संख्याएँ नहीं हो सकती, जिन के उत्थापन से जो बहुपद का मान हो वह $म$ के भाग देने से निःशेष हो।

मानो कि जौ $य = च$ तो बहुपद $म$ से निःशेष होता है।
लब्धि = $आ$ मान लो तो $आ \cdot म$

$= अ \cdot च^n + क_1 \cdot च^{n-1} + क_2 \cdot च^{n-2} + \dots + क_n$ इस को बहुपद में घटा देने से

$$पा - आ \cdot म = अ (य^n - च^n) + क_1 (य^{n-1} - च^{n-1}) + \dots \\ = (य - च) पा_१,$$

(जहाँ $पा_१$ के मान में $य$ का सब से बड़ा घात $n-१$ है)

इस लिये $पा = (य - च) पा_१ + आ \cdot म$ ऐसा समीकरण का रूप होगा। इस में मानो कि जौ $य = ज$ तो फिर $पा$ $म$ से निःशेष होता है इस लिये

$(ज - च) पा_१ + आ \cdot म$ यह $म$ से निःशेष होगा पर $आ \cdot म$ $म$ से निःशेष होता है और $ज - च$ यह $म$ से छोटा होने के कारण $म$ से दृढ है इस लिये $पा_१$ जिस में $य$ का सब से बड़ा घात $n-१$ होगा, वह भी $म$ से निःशेष होगा यों बार बार क्रिया करने से अंत में $य$ का एक घात रह जायगा जो कि $य$ के स्थान में किसी $-म$ और $म$ के भीतर की संख्या के उत्थापन से और $म$ के भाग देने से निःशेष हो जायगा। इस तरह से सिद्ध हो गया कि $-म$ और $म$ इस के भीतर $न$ संख्या ऐसी हो सकती है जिन के उत्थापन

से ऊपर का बहुपद $म$ के भाग देने से निःशेष हो सकता है।

२। फरम्याट के सिद्धान्त से $य^{म-१} - १$ इस में जौ $म$ दृढसंख्या हो तो

१। पहली युक्ति से $-म$ और $म$ के भीतर ऐसे $य$ के $म-१$ मान होंगे जिन के उत्थापन से $य^{म-१} - १$ यह $म$ से निःशेष होगा पर

$य^{म-१} - १ = (य^{\frac{म-१}{२}} + १) (य^{\frac{म-१}{२}} - १)$ । इस के दूसरे खंड याने $य^{\frac{म-१}{२}} - १$ इस में $-म$ और $म$ के बीच में १। इस से $म-१$ इतने ही मान होंगे जिनके उत्थापन से $य^{\frac{म-१}{२}} - १$ यह $म$ से निःशेष होगा इस लिये बाकी $य^{\frac{म-१}{२}} + १$ इतने मान और होंगे जिनके उत्थापन से $य^{\frac{म-१}{२}} + १$ यह $म$ से निःशेष होगा क्योंकि ऊपर सिद्ध हो चुका है कि $(य^{\frac{म-१}{२}} + १) (य^{\frac{म-१}{२}} - १) = य^{म-१} - १$ यह, $-म$ और $+म$ के बीच $य$ के $म-१$ मान ऐसे हैं $य$ के स्थान में जिन के उत्थापन से और $म$ के भाग देने से निःशेष होगा।

३। २। में जौ दृढ $म = ४न + १$ तो $\frac{म-१}{२} = २न$ इस लिये $य^{\frac{म-१}{२}} + १ = य^{२न} + १$ यह याने $(य^n)$ और (१) का वर्ग योग $-म$ और $+म$ के बीच $य$ के स्थान में $२न$ संख्याओं के उत्थापन से और $म = (४न + १)$ के भाग देने से निःशेष होगा इस लिये $४न + १$ दृढ भी किसी दो पूरी संख्याओं का वर्गयोग होगा क्योंकि $(य_१^२ + र_१^२) (य_२^२ + र_२^२)$

$$= य_१^२ य_२^२ + य_१^२ र_२^२ + य_२^२ र_१^२ + र_१^२ र_२^२ = य_१^२ य_२^२ \\ + २ य_१ य_२ र_१ र_२ + र_१^२ र_२^२ + य_१^२ र_२^२ - २ य_१ य_२ र_१ र_२$$

$$+ य_२^२ र_१^२ = (य_१ य_१ + र_१ र_२)^२ + (य_१ र_२ - य_२ र_१)^२$$

इस लिये इस की उलटी क्रिया से वर्गयोग में किसी दृढ के भाग

देने से जो लब्धि पूरी आवे तो वह दृढ़ किसी दो पूरी संख्याओं का वर्गयोग होगा।

फरम्याट ने इस की उपपत्ति व्यतिरेक अनुमान पर से की है। उपपत्ति के कागज सन् १८७९ तक नहीं मिले थे पीछे से ह्यूगेन्स (Huygens) की पोथियों में लिडेन (Leiden) की लाइब्रेरी में मिले।

(४) २ से अधिक दृढ़संख्या कोई दो निश्चित संख्याओं के वर्गान्तर के बराबर है। फरम्याट ने इसे इस तरह सिद्ध किया है—

मानो दृढ़ = n , तो प्रश्न के अनुसार

$$y^2 - r^2 = (y-r)(y+r) = n।$$

पर n तो दृढ़ है इस लिये $y-r$ और $y+r$ इस से निःशेष नहीं हो सकता इस लिये जौ समीकरण ठीक किया जावे तो $y-r=1$ और $y+r=n$ होगा। इन पर से $y = \frac{n+1}{2}$ और $r = \frac{n-1}{2}$,

(५) सिद्ध करो कि $y^2 + 2 = r^2$ इस में y का एक ही मान ५ और $y^2 + 8 = r^2$ इस में y के दो ही मान २ और ११ हैं। फरम्याट ने इन दोनों सवालों को अँगरेजी गणकों से ललकार कर पूछा था। इस तरह से फरम्याट ने बहुत प्रश्न किए हैं।

यूलर ने सन् १७७२ ई में बर्लिन के मेमोर्स (Memoirs of Berlin) में दृढ़संख्या के लिये $y^2 + y + 41$ यह प्रकार लिखा जो कि $y=41$ में बिगड़ जाता है। ४१, ४३, ४७, ५३, ... ४० दृढ़संख्या ठीक आती हैं पर उस के आगे प्रकार बिगड़ जाता है। इसी तरह $y^2 + y + 17$ और $2y^2 + 29$ ये दोनों भी क्रम से $y=17$ और $y=29$ में बिगड़ जाते हैं।

चिति।

आर्यभट ने साफ साफ $1+2+3+\dots+$ इस के योग की विधि नहीं लिखी पर योगान्तरश्रेणी की योगविधि अपने आर्यभटीय के गणितपाद में—

“इष्टं व्येकं दलितं सपूर्वमुत्तरगुणं समुखमध्यम्।

इष्टगुणितमिष्टधनं त्वथवाद्यन्तं पदार्थहतम् ॥”

यह लिखी है। इष्ट से पद (गच्छ) और ‘इष्टधन’ से सर्वधन लिया है। पूर्व से पहली संख्या है जिसे आदि, मुख, ... कहते हैं। ऊपर के सूत्र से जिस श्रेणी में आदि = आ, उत्तर = चय = च, और पद = गच्छ = इ है उस का

$$\text{मध्यधन} = \text{च} \left(\frac{इ-१}{२} \right) + \text{आ} = \frac{\text{च}(इ-१) + २\text{आ}}{२} \text{ और}$$

इष्टधन = सर्वधन = इ $\left\{ \frac{\text{च}(इ-१) + २\text{आ}}{२} \right\}$ । इसी को भास्कर ने भी अपनी पाटी लीलावती में लिखा है।

ऊपर के सर्वधन में जौ आ = १, च = १, इ = ५ तो

$1+2+3+\dots+p = \frac{५(५+१)}{२}$ । इस तरह से कह सकते हैं कि आर्यभट एकादिमंकलित की विधि जानते थे। उन्होंने ने इस संकलित का नाम चिति रक्खा है। गणितपाद का २२ श्लोक देखो)।

आगे आर्यभट ने एक चिति-घन या ने एक सूची (Pyramid) बनाई है। उस की सूरत लिखते हैं कि पहले एक (ईंट) उस के बाद $1+2$, (ईंट) यों $1+2+3$, ... बढ़ाते जाओ। ऐसी चिति का घन याने ईंटों की गिनती जाननी हो तो गच्छ = ग कहो तो ईंटों की गिनती = $\frac{ग(ग+१)(ग+२)}{६}$ = $\frac{(ग+१)^३}{६} - \frac{(ग+१)}{६}$ ।

उन का सूत्र है —

“एकोत्तराद्युपचितेर्गच्छाद्येकोत्तरत्रिसंवर्गः ।

षड्भक्तः स चित्तिघनः सैकपदघनो विमूलो वा ॥”

इस चिति की सूरत बनाओ तो नीचे जौँ त्रिभुजाकार १० ईँटें रखो फिर दूसरे थर में ६, तीसरे थर में ३ और चौथे थर में १ तो यह त्रिभुजाकार चिति के आधार पर एक सूची (Pyramid) होगी जिस में सब ईँटें = १ + ३ + ६ + १० होंगी ।

इस में जौँ थर = पद = प तो

$$१ + ३ + ६ + १० + \dots + \frac{प(प+१)}{२} = \frac{प(प+१)(प+२)}{६}$$

इस चित्तिघन से समझ पड़ता है कि पटने के रहनेवाले आर्यभट ने बौद्धों की समाधि के ऊपर बनी हुई ऐसी सूचियों को देखा था इसी लिये उन में लगे हुए ईँटों की गिनती चिति-घन के नाम से निकाली है ।

आर्यभट ने $१^२ + २^२ + ३^२ + \dots + प^२$ इस के और

$१^३ + २^३ + ३^३ + \dots + प^३$ इस के योग की विधि भी वर्गचित्तिघन और घनचित्तिघन के नाम से निकाली है ।

$$\text{वर्गचित्तिघन} = \frac{प(प+१)(२प+१)}{६}$$

$$\text{और घनचित्तिघन} = \left\{ \frac{प(प+१)}{२} \right\}^२$$

(गणितपाद का २२ श्लोक देखो)

जिस को आर्यभट ने चिति कहा है उसी को और देश-वाले त्रिभुजाकारसंख्या (Triangular numbers) कहते हैं । इन के योग की विधि पैथागोरास (Pythagoras) को मालूम थी पर आगे संकलितैक्य वगैरह की विधि शायद

नहीं मालूम थी । पीछे इन के स्कूल के पंडित डाइओफांटस (Diophantus) को मालूम हो गई थी ।

अरब के ज्यौतिषियों में सब से पहला अलकरीह है जिस ने

$$१^२ + २^२ + ३^२ + \dots + प^२$$

$$= (१ + २ + ३ + \dots + प) \left(\frac{२प+१}{३} \right)$$

$$\text{और } १^३ + २^३ + ३^३ + \dots + प^३$$

$= (१ + २ + ३ + \dots + प)^२$ इन दोनों प्रकारों की उप-पात्ति की है ।

पीछे से ब्रह्मगुप्त ने चिति नाम को उड़ा कर संकलित, संकलित-संकलित, ... नाम रखे (मेरे छपवाए ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त का १८८ पृ. देखो) ।

फिर इन के पीछे श्रीधर, भास्कर, ... ने भी यही नाम लिख कर विधियों को लिख चले हैं ।

यूरप में प्यासकल (Pascal) ने सन् १६५३ ई. में पाटीत्रिभुज (Arithmetical triangle) के नाम से संकलित, संकलितैक्य, ... श्रेढीपरंपरा लिखी है जो सन् १६६५ ई. में छपी गई ।

आर्यभट, ब्रह्मगुप्त, ... योगान्तर श्रेढी का गणित, जानते थे पर गुणोत्तरश्रेढी के गणित की कहीं भी इन के ग्रंथों में चर्चा नहीं है ।

दूसरे आर्यभट ने अपने महासिद्धान्त में गुणोत्तर श्रेढी लिखी है पर उन के ग्रंथ का विशेष प्रचार न था ।

जान पड़ता है कि संस्कृत में गुणोत्तर श्रेढी का गणित पृथूदक चौबे (पृथूदक स्वामी) ने जो लिखा है इन्हीं की विधि पीछे

से भास्कर ने अपनी लीलावती में लिख दी है। (मेरा छप-वाया ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त का १८६ पृ. देखो)।

भास्कर आदर के लिये पृथूदक को चतुर्वेदाचार्य कहते हैं। ये कन्नौज के रहनेवाले थे। इन्होंने ब्रह्मगुप्त के ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त के ऊपर बहुत अच्छी एक टीका बनाई है। उस टीके की एक खंडित पुगनी प्रति इंडिया-आफिस की लाइब्रेरी में है। (ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त में मेरी भूमिका देखो)।

यंत्र। (*Magic Squares*)

३, ४, ५, ... के वर्गकोठे में एक एक अंक की बढती से इस तरह से अंक भरे जाते हैं जहाँ तिरछे, खड़े और कर्णों के कोठों के अंकों का योग बराबर होता है। ऐसे वर्गचक्र को संस्कृत के पंडित यंत्र कहते हैं।

नारायण पंडित ने इस का नाम भद्र रक्खा है।

जैसे—

८	१	६
३	५	७
४	९	२

इस नव कोठे में एक एक की बढती से इस चाल से अंक भरे हैं—

जहाँ तिरछे, खड़े और कर्णों के कोठों के अंकों के योग १५ होते हैं।

इस लिये इसे पंद्रहा यंत्र कहते हैं।

जिस वर्ष संयोगवश रवि या मंगल के दिन दिवाली पड़ जाती है उस दिन महानिशा (आधीरात) में तांत्रिक पवित्र होकर अष्टगंध की स्याही और अनार की कलम से भोजपत्र के ऊपर एक श्वाभ से इस की अनेक प्रति लिख कर अपने पास रख छोड़ता है। हिंदू लोग उस तांत्रिक को कुछ दे कर इस यंत्र को मोल लेते हैं। उसे चाँदी के यंत्र के बीच

भर कर अपने गले या बाह में बाँधते हैं। कहावत है कि इस के पहनने से भूत, प्रेत, महामारी ... की बाधा नहीं होती। गणित से सिद्ध है कि नव कोठे में पूरे पूरे अंकों के भरने से बीसा (२०) नहीं हो सकता तो भी आज तक गवार् लोग इस के फेर में पड़े रहते हैं और कहा करते हैं कि

‘सिद्ध होय बीसा। का करै जगदीसा॥’

तरह तरह के कामों के लिये तरह तरह के बीसा, तीसा, चौतीसा, ... यंत्र भरे जाते हैं। सभी वर्ग कोठे में इस तरह के अंक भरे जा सकते हैं। यद्यपि इस का कुछ विशेष संबंध गणितशास्त्र से नहीं है, कुछ योगश्रेढ़ी का काम पड़ता है तो भी बहुत से लोगों ने एक खेल समझ कर इस के भरने की बहुत रीतिआँ दिखलाई हैं। मैं ने भी भास्कर-लीलावती की टिप्पणी में सब वर्गचक्रों में अंक भरने की रीति लिखी है उस का अलग हिंदी अनुवाद भी सब के समझने के लिये छपवा दिया है। उस में $४n + २$ इस के वर्गचक्र में भी अंक भरने की विधि लिखी है जो कि यूरप के ज्योतिषियों के लिये बहुत कठिन मालूम होती थी।

इस यंत्र के पहनने से भूत, प्रेत, ... नगीच नहीं आते यह विश्वास हिंदु ही में नहीं है बल्कि यूरप में भी फ्रेग से बचने के लिये लोग चाँदी के पत्तरो पर यंत्रों को खुदवा कर पहनते थे। आल्बर्ट डूरर (*Albert Dürer*) ने सन् १५०० ई. में एक तसवीर में बड़ी खूबसूरती के साथ एक यंत्र को बनवाया है। बौद्धों में भी इस का बहुत प्रचार है।

संस्कृत के तंत्रशास्त्रों में इन यंत्रों की बड़ी महिमा लिखी है। अरब के लोगों में भी इस का प्रचार है।

हिंदुस्तान में इन यंत्रों का कब से प्रचार हुआ इस का पता ठीक ठीक नहीं लगता पर व्यवहार से जान पड़ता है कि बहुत पुराने समय से ये प्रचलित हैं। नारायण पंडित ने अपनी गणित-कौमुदी में जो सन् १३५६ ई. में बनाई गई है, इन वर्गचक्रों में और और तरह तरह के चक्रों में अंक भरने की बहुत विधि लिखी है। उस में लिखा है कि (राजा) मणिभद्र के लड़के के लिये ये सब यंत्र लिखे गए हैं। ऐसे वर्ग कोठों में अंक भरने से जोड़ने के बहुत उदाहरण बन जाते हैं जिन सभी का एक ही उत्तर होता है (भास्कर की लीलावती में मेरा योगचक्र देखो)।

यूरप में सब से पहले मोसकोपलस (*Moschopulus*) ने जो कि सन् १४७० ई. में इटली में मरे, इन वर्गचक्रों के ऊपर बहुत विचार किए थे।

इन के हाथ की लिखी पोथी प्यारिस की नेशनल लाइब्रेरी (*National Library*) में मौजूद है। वहाँ की पोथियों में उस का २४२८वाँ नंबर है।

पीछे से यूलर (*Euler*) ने सन् १७५९ ई. में बर्लिन के (*Hist. del. Acad. des Sciences*) में इस के ऊपर बहुत बातें लिखी।

इस के विषय में जिन्हें और बातों के जानने की जरूरत हो वे संस्कृत में नारायण पंडित की गणितकौमुदी देखें और यूरप के पंडितों की विधि जाननी हो तो

Quarterly Journal of pure and Applied Mathematics, Vol. X., p. 186; Vol. XI., pp. 57, 123, 213; Vol. XII., p. 213: *The Messenger of Mathematics*, Vol. II.: *the Nouv. Corr. Math.* Vol. II., pp. 161, 193; and the Report for 1880 of the French association for the advancement of science. इन ग्रंथों को देखें।

तंत्रशास्त्र में तरह तरह के चक्र बना कर उन में जगह जगह पर शब्दों को लिख कर बहुत यंत्र बनाए गए हैं। उन में से एक श्रीयंत्र की बड़ी महिमा लिखी है। देवी के पूजनेवाले इसे ताँबे, चाँदी, सोने के पत्तों पर या बिल्लौर पत्थर पर खोदवा कर रोज पूजते हैं। कहते हैं कि पूजने से मनोरथ पूरा होता है। इस का भी प्रचार बहुत पुराने समय से है। इस तरह के सैकड़ों यंत्र हिंदुस्तान में प्रचलित हैं। कहावत है कि जिस के गले में सच्चा बीसा बंधा हो उसे तलवार की चोट नहीं लगती।

बहुतों का मत है कि हिंदुस्तान में तंत्रविद्या चीन से आई है।

पैथागोरास (*Pythagoras*) के स्कूल के पंडितों में भी यंत्रों का प्रचार था।



इस पंचकोने यंत्र पर उन लोगों की बहुत श्रद्धा थी। उन लोगों को विश्वास था कि इस यंत्र के पूजने से देह निरोग रहती है। जैसे श्रीयंत्र में अक्षर लिखे जाते हैं वैसे ही इस के पाँचों कोनों पर *nyctera* (नगियइआ) इस शब्द के एक एक अक्षर लिखे जाते थे *et* इन दोनों अक्षरों की जगह एक ही अक्षर *θ* लिखते थे।

यह पंचकोना हिंदुस्तान में भी बहुत पुराने समय से प्रसिद्ध है। तीन तीन की गिनती कर बहुत लोग इस के दो दो रेखाओं के योगों पर गोटी बैठाते हैं। शर्त यह है कि जहाँ गोटी बैठ गई हो वहाँ से गिनती न शुरू हो। इस तरह गोटीआँ बैठ जाती हैं और एक जगह खाली रह जाती है। इसे बहुत लोग नव गोटीआ भी कहते हैं।

मैसूर के हसन जिले के एक गाँव में एक फाटक के पत्थर पर एक यंत्र खोदा हुआ है उस के एक कोठे में यह पचकोना भी है। लोगों को विश्वास है कि गाँव के फाटक पर ऐसे यंत्र के रहने से पशुओं में कोई बीमारी नहीं फैलती। अनुमान किया जाता है कि यह खम्भा जिस पर यंत्र खोदा है हजार वर्ष का पुराना है।

(See The Indian Antiquary, February, 1873)

पैथागोरास (Pythagoras) ईशा के ५६९ वर्ष पहले समोस (Samos) में पैदा हुए थे। इन के माँ वाप तैरियन (Tyrian) थे। यह ६० वर्ष की उमर में मरे। इस से साफ है कि ये थेल्स (Thels) के समय में थे। इन के जीवन-चरित में बहुत संशय है। जहाँ तक पता लगता है उस से जान पड़ता है कि पहले ये सिरोंस के फेरसिडेस (Pherecydes of syros) से फिर पीछे अनाक्सिम्याण्डर (Anaximander) से पढ़े थे। गुरु के कहने से पढ़ लेने पर ये थेबेस (Thebes) या मेम्फिस (Memphis) में गए। वहाँ पर कई वर्ष तक ठहरे थे। फिर एजिप्ट छोड़ कर इन्होंने एशिया माइनर की यात्रा की और तब समोस में ठहर कर व्याख्यान देना आरंभ किया पर इस से कुछ फल न हुआ। ईशा के ५२९ वर्ष पहले अपनी माँ के साथ ये सिसिली (Sicily) गए। अपने एक योग्य विद्यार्थी को भी समोस से साथ लेते गए। वहाँ से टारेंटम (Tarentum) गए पर जल्द लौट कर इटली के दक्षिण डोरियन द्वीप (Dorian) के क्रोटन (Croton) स्थान में गए। यहाँ पर इन्होंने कई स्कूल खोले जिन में बड़े बड़े धनिओं के लड़के पढ़ने लगे इस लिये वे स्कूल थोड़े ही दिनों में बहुत प्रसिद्ध हो गए, जिस से पैथागोरास का बड़ा नाम हुआ। वहाँ स्त्रियों के बाहर निकलने और क्रमे-

स्त्रियों में शरीक होने की रीति न थी पर स्त्रियाँ उस नियम को तोड़ कर पैथागोरास के देखने के लिये जाती थीं।

पैथागोरास ने अपने एक नानेदार मिलो (Milo) की बेटी थेनो (Theano) से बुढ़ीती में ब्याह कर लिया था। थेनो बड़ी खूबसूरत थी; इस ने अपने पति का जीवन-चरित भी लिखा था पर बड़े दुःख की बात है कि वह नष्ट हो गया।

पैथागोरास हिंदुस्तान में आया था या नहीं इस में बहुत संशय है। जो हो पर बहुतों का यह कहना कि पैथागोरास हिंदुस्तान में आ कर पटने के आर्यभट्ट से गणित पढ़ा था यह बिल्कुल झूठ बात है क्योंकि पैथागोरास आर्यभट्ट से १०२७ वर्ष पहले हुआ है। यह संभव है कि जौ पैथागोरास हिंदुस्तान में पढ़ने के लिये आया हो तो किसी और पंडित से पढ़ने में पढ़ा होगा।

तुरको ने सन् १४५३ ई. में जब कान्स्टांतिनोपेल् (Constantinople) को लूटा उसी समय ग्रीस के गणित-स्कूल दूट जाने से ग्रीस के पंडित इधर उधर भटकने लगे। बहुत से इटली में चले गए उन्हीं लोगों से यूरोप में गणित-विद्या फैली।

विलोम गणित ।

संस्कृत के अंकगणित में सब से प्राचीन ग्रंथ जो अभी तक मिला है, आर्यभट्ट का है, जो कि सन् ४९८ ई. में बना है, उस में विलोम गणित का प्रकार लिखा है—

“गुणकारा भागहरा भागहरा ये भवन्ति गुणकाराः ।

यः क्षेपः सोऽपचयोऽपचयः क्षेपश्च विपरीते ॥”

(गणित भा. ३, २८ श्लो.) ।

इसी को व्यस्तविधि भी कहते हैं ।

लल्ल का पाटीगणित नहीं मिलता इस लिये नहीं कह सकते कि उन्हों ने क्या लिखा है । इस में कुछ ब्रह्मगुप्त ने अपने ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त के कुट्टकाध्याय के १४वें श्लोक में विशेष किया है—

“गुणकश्छेदश्छेदो गुणको धनमृणमृणं धनं कार्यम् ।

वर्गः पदं पदं कृतिरन्त्याद्विपरीतमाद्यं तत् ॥

इस में वर्ग का मूल और मूल का वर्ग करना इतना विशेष है ।

भट्ट बलभद्र और श्रीपाति के अंकगणित नहीं मिलते ।

श्रीधर अपनी बड़ी पाटी में शायद इस पर कुछ विशेष लिखे हों पर उन की त्रिशतिका (पाटीसार) में इस गणित की कुछ चर्चा नहीं है ।

सब के बाद भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती में सब तरह से विलोमक्रिया की पूरी रीति लिखी क्योंकि जहाँ राशि ही का कुछ अंश राशि ही में मिलाया या घटाया गया हो वहाँ विलोमक्रिया में क्या करना इस पर ब्रह्मगुप्त ने कुछ भी नहीं लिखा है ।

संस्कृत की पाटी में सब से प्रधान त्रैराशिक है । भास्कर के मत से त्रैराशिक ही पाटी (अंकगणित) है । उन्हों ने अपनी पाटी लीलावती में लिखी दिया है कि—

“अस्ति त्रैराशिकं पाटी” ।

इष्टकर्म से राशि का मान जानना, चावली की नालियों के पानी से भरने का समय जानना, साझे के धन को बाँटना, सैकड़े का सूद निकालना, मिश्रधन जान कर व्याज अलगाना, जुदे जुदे भाव के सोने को गला कर मिलाए हुए सोने का भाव जानना,

एक चीज के बदले दूसरी चीज लेना, ... सब के लिये त्रैराशिक से रीति बनाई गई है ।

स्वांशानुबंध और स्वांशापवाह ।

संस्कृत पाटी में एक गणित स्वांशानुबंध और स्वांशापवाह है । जहाँ राशि में उसी का कुछ भाग मिलाना होता है उसे स्वांशानुबंध कहते हैं ।

जैसे—

साल में पाँच रुपए सैकड़े व्याज के हिसाब से ४०० रुपए दिए गए, और शर्त यह हुई कि हर साल के अंत में व्याज और मूलधन का योग मूल धन समझा जायगा तो चार साल के अंत में क्या मिश्रधन होगा । यहाँ हर साल में मूल धन में उसी का बीसवाँ भाग जुटता जायगा इस लिये यह स्वांशानुबंध या स्वभागानुबंध हुआ । संस्कृत में लिखी रीति से इस का उत्तर

$$\frac{400 \times 298}{208} = \frac{298}{208} \text{ यह हुआ ।}$$

जहाँ राशि में उसी का कुछ भाग घटाना होता है उसे स्वांशापवाह या स्वभागापवाह कहते हैं ।

जैसे—

पाँच आदमियों के लिये एक बर्तन में ५ सेर दूध रक्खा था । एक आदमी चोरी से एक सेर दूध निकाल कर उस में एक सेर पानी मिला दिया । इसी तरह बाकी और चार आदमियों ने सेर सेर भर की चोरी की और सेर सेर भर पानी मिलाते गए, तो अंत में पानी मिले दूध में कितना दूध रह गया ।

यहाँ बर्तन में जो पहले ५ सेर दूध और पीछे से पानी मिला ५ सेर दूध रहेगा उस का पाँचवाँ भाग हर बार घटता जायगा इस लिये यह भागापवाह हुआ ।

संस्कृतविधि से इस का उत्तर = $\frac{4 \times 8^4}{5^4} = \frac{8^4}{5^4} = \frac{4096}{625}$ यह हुआ।

पीछे से मिलाने को अनुबंध और निकालने को अपवाह कहते हैं। इस लिये अपने भागों या अंशों के मिलाने और निकालने से इस गणित का नाम स्वांशानुबंध और स्वांशा-पवाह पड़ा।

इष्टकर्म।

राशि में उसी के कई एक अंश मिले या घटे रहने पर जो मान हो वह बता दिया जाय तो उस को जान कर राशि जानने की क्रिया को 'इष्टकर्म' कहते हैं।

(हकीकत में यह प्रश्न बीज के एकवर्णसमीकरण का है)।

जैसे— वह कौन राशि है जिस की तिहाई और चौथाई निकाल देने पर १० रह जाता है। इस में मान लो कि वह राशि इष्ट, १ है तो प्रश्न के अनुसार कर्म करने से

$$1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{12} \text{ यह वचा। अब दृश्य} = 10 \text{ को इष्ट } 1 \text{ से गुण कर वचे } \frac{5}{12} \text{ से भाग देने पर राशि का मान} = \frac{10 \times 12}{5} = \frac{120}{5} = 24।$$

दूसरे देश के लोग कहते हैं कि संस्कृत पाटी में बहुत बीजगणित के प्रश्नों के उत्तर निकालने के लिये एक गणित 'झीष्टकर्म' है पर आज तक संस्कृत के जितने पाटीगणित मिले हैं किसी में 'झीष्टकर्म' नहीं है। शायद बौद्धों के अंकगणित में हो तो हो।

मैंने भास्कर की लीलावती की टिप्पणी में 'झीष्टकर्म' लिखा है। वायुदेवशास्त्रीजी ने भी अपने हिंदी बीज-

गणित और भास्कर-लीलावती-टिप्पणी में 'झीष्टकर्म' लिखा है।

ज्यौतिष-सिद्धान्तों में संस्कृत के ज्यौतिषी महापात निकालने में अलवत्त दो इष्ट मान कर क्रिया करते हैं जो कि 'झीष्टकर्म' ही का एक भेद है (ज्यौतिष-सिद्धान्त का पाता-धिकार देखो)।

झीष्टकर्म से बीज के एक वर्णसमीकरण के बहुत प्रश्नों का उत्तर हो जाता है। बीजगणित से सिद्ध है कि किसी एकवर्णसमीकरण का पक्षान्तरानयन करने से

$अ.य + क = ०$ ऐसा रूप हो सकता है। इस में मानो कि जब $य = इ_१$ और $य = इ_२$ तो समीकरण का क्रम से मान $मा_१$ और $मा_२$ हुआ तो

$$अ.य + क = ०। अ.इ_१ + क = मा_१। अ.इ_२ + क = मा_२।$$

$$\text{अंतर करने से } अ(इ_१ - य) = मा_१।$$

$$अ(इ_२ - य) = मा_२।$$

$$\text{आपस में भाग दे देने से } \frac{इ_२ - य}{इ_१ - य} = \frac{मा_२}{मा_१}।$$

$$\therefore इ_२ \cdot मा_१ - मा_२ \cdot य = इ_१ \cdot मा_२ - मा_२ \cdot य$$

$$\text{और } य = \frac{इ_१ मा_२ - इ_२ मा_१}{मा_२ - मा_१}, \text{ इसी को झीष्टकर्म कहते हैं।}$$

अरब के गणक इष्टकर्म और झीष्टकर्म को जानते थे। यूरोप के लोग इष्टकर्म को रेग्युला फालसा (Regula falsa) या फालसा पासिडिओ (Falsa positio) और झीष्टकर्म को रेग्युला दौरम् फालसोरम् (Regula Duorum falsorum) कहते हैं।

डाइओफांटस (Diophantus) ने झीष्टकर्म से वर्ग समीकरण, ... के प्रश्नों का भी स्थूल उत्तर निकाला है।

जैसे फ (य) = ब, यह एक समीकरण हो तो मान लो कि इस में य = अ, और य = क तो फ (अ) = आ और फ (क) = का हुआ। अंतर करने से

$$ब-आ = ज_{अ} \text{ और } ब-का = ज_{क} \text{ तो}$$

$$य = \frac{क.ज_{अ} - अ.ज_{क}}{ज_{अ} - ज_{क}}।$$

फ (य) = ब, इस में जौ य का एक घात रहेगा तो ऊपर दिखाई गई द्विष्टकर्म की विधि ही यह हो जायगा और य का मान ठीक आ जायगा। पर य के वर्ग, घन, ... रहने से स्वल्पांतर से य का मान आवेगा।

संस्कृत के अंकगणित में बहुत बीजगणित के प्रश्नों के उत्तर निकालने के लिये प्रकार लिखे हैं जिनका वर्णन बीजगणित के भाग में किया जायगा।

यूरप के लोगोंने भास्कर की लीलावती के प्रश्नों से उस समय की रीति का अनुमान करते हैं 'प्राप्नोति चेत् षोडशवत्सरा स्त्री' इस प्रश्न से एक महाशय ने अनुमान किया है कि उस समय स्त्री १६ वर्ष में ठीक जवान समझी जाती थी। हिंदुस्तान में अब भी १६ वर्ष की स्त्री जवान समझी जाती है (सुश्रुत देखो), 'प्राप्ते तु षोडशे वर्षे शूकर्यप्यप्सरायते'।

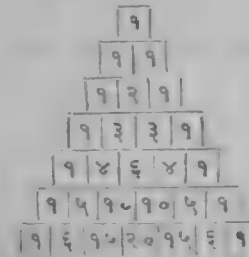
'मासे शतस्य यदि पञ्च कलान्तरं स्यात्...' इस पर से अनुमान किया गया है कि उस समय एक महीने में सौ पर ५, ३ १/२ रुपए बहुत ज्यादा सूद लिए जाते थे पर बीजगणित में एक जगह भास्कर ने 'एककशतदत्तधनात्' इस में महीने में सौ का एक ही रुपया सूद लिखा है। इतना कहने का इतना ही मतलब है कि सब समय में गर्ज पड़ने पर सब का भाव तेज और मंदा हुआ करता है। ऐसे ऐसे स्थानों में अनुमान से पक्का पता नहीं लग सकता।

एक-दो... भेद (Combinations)।

हिंदुस्तान में बहुत पुराने समय से इस गणित का व्यवहार है।

छंदःशास्त्र में यह जिस रीति से निकाला जाता है उसे मेरु (पहाड़) कहते हैं।

जैसे ६ के भेद निकालने हैं तो एक चोटी और एक एक कोठे की बढ़ती से छ सीढ़ी का एक पहाड़ बना कर पहले कोठे में एक और हर एक सीढ़ी के दोनों किनारों के कोठों में एक एक लिखेंगे। फिर ऊपर के पास पास के दो दो कोठों के अंकों के योगों को नीचे के कोठों में रखते जायेंगे जैसा कि इस पहाड़ में है—



अंत की सीढ़ी में जो १।६।१५।२०। १५।६।१। हैं वही भेद हैं। घृत्तर-त्नाकर की टीका में नारायणभट्ट ने प्राचीन-कारिका लिखी है—

“आदावेकं लिखेत् कोष्ठं तदधो द्वे च संलिखेत्।

तदधोऽस्त्रीणि कोष्ठानि एवं रूपेण वर्धयेत् ॥

आदावेकं लिखेत् कोष्ठमेकं मध्यं च पूरयेत्।

लेखकोष्ठोपरिप्राप्तैरग्निमाङ्केन संयुतैः ॥”

इस भेद के विषय में जिन्हें बहुत बात जाननी हो वे पिंगल या नारायण पंडित की बनाई गणितकौमुदी देखें।

भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती में इस भेद का जो प्रकार लिखा है वही आज कल अँगरेजी बीजगणितों में प्रचलित है। भास्कर ने भी लिखा है कि यह छंदःशास्त्र के खंडमेरु में प्रसिद्ध है।

संस्कृतपाटी में क्षेत्रव्यवहार, कुट्टक और अंक-पाश भी बहुत विस्तार से लिखे गए हैं। रेखागणित के वर्णन में क्षेत्रव्यवहार का और बीजगणित के वर्णन में कुट्टक और अंकपाश का वर्णन किया जायगा।

हिंदुस्तान के पुराने संस्कृत के पंडित अभिमान की बात समझ कर अपना जीवन-चरित नहीं लिखते थे। जहाँ-गीर के समय की बात है; भट्टोजिदीक्षित ने अपनी सिद्धान्तकौमुदी में अपना नाम तक नहीं लिखा है।

नाम और मिति लिखने की कुछ चाल संस्कृत के ज्यौतिषियों में थी पर जिस समय किसी का संवत् और शाका नहीं था उस समय किसी ब्रह्मर्षि के हृदय में गणित के जड़ और अंक स्थान पैदा हुए इसलिये वह मिति कैसे लिखे।

हम लोग सब से बड़ा ब्रह्मा को आदि ज्यौतिषी कहते हैं जो कि ज्यौतिषवेदांग के बनानेवाले हैं। वे ही सब के माथों में छट्टी के दिन भले बुरे कामों का लेखा लिखते हैं। इस लिये वह अंक बनानेवाला महाब्रह्मर्षि ब्रह्मा हो कर सब का पितामह हुआ उस की प्रशंसा शेष भी करे तो निःशेष नहीं हो सकती। अंत में यही कहना है कि जिस की प्रशंसा हिंदू, मुसलमान, क्रिस्तान... सब एक स्वर से करते हैं वह अंक का विधाता हिंदुस्तान की कीर्ति को संसार भर में फैलानेवाला धन्य है।

नई कल्पना।

नैयायिकों का मत है कि परमाणुओं के संयोग से सृष्टि की सब चीजें पैदा हुई हैं। दो परमाणुओं के संयोग से द्व्यणुक, तीन के संयोग से त्र्यणुक... बने हैं। थोड़े परमाणुओं के संयोग से छोटी सरसो और बहुत परमाणुओं

के संयोग से बड़ा मेरु (पहाड़) बना है। जहाँ जितने कम परमाणुओं का संयोग रहेगा वहाँ वह उतनी ही छोटी चीज होगी।

इस लिये कह सकते हैं कि सृष्टि-रचना के नियम से सब से छोटी संख्या (परमाणु) के झुंडों के मिलने से १, २, ... ये सब संख्याएँ भी बनी होंगी।

जैसे— $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ इस अनंत पद की गुणोत्तर श्रेणी में अंत का पद सब से छोटा याने परमाणु होगा। इस लिये श्रेणी को उलट कर लिखने से पहला पद परमाणु, दूसरा दो परमाणु, तीसरा ४ परमाणु, ... होगा और सब परमाणुओं का योग

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 \text{ (श्रेणीगणित से)।}$$

इस लिये कहेंगे कि बहुत परमाणुओं के संयोग से १ बना है।

नई संख्या।

जो १, २, ३, ... संख्याएँ प्रचलित हैं, इन से असंभव-संख्या याने $\sqrt{-1} = i$ यह जिस में हो, नहीं गिन सकते इस लिये आज कल नए गणकों का सिद्धान्त है कि ऐसा अंकों का रूप होना चाहिए जिस से संभव, असंभव सभी संख्याएँ पैदा हों। वे लोग इस के लिये संख्या का

$a + ik$ यह रूप बनाया है। इस में a और k संभव संख्या हैं। इस में जहाँ $k = 0$ और $a = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, -1, -2, \dots$ मानो तो साधारण धन या ऋण संख्या होंगी।

इस तरह से $a + ik$ यह सब संभव और असंभव संख्याओं को पैदा कर सकता है फिर इन से सभी गणित के प्रकार बन सकते हैं। क्यों कि

$$\text{ज्याय} = \frac{1}{2} (2^{1/y} - 2^{-1/y}) \text{ और}$$

$$\text{को ज्याय} = \frac{1}{2} (2^{1/y} + 2^{-1/y})$$

ये दोनों असंभव से संभव पदार्थ त्रिकोणमिति और बीजगणित से सिद्ध होते हैं।

अ + 1 को इसे मिश्रित संख्या (Complex numbers) कहते हैं। इस से हजारों नए प्रकार बनते चले जाते हैं। अभी सन् १९०२ ई. में ह्विटकर (S. T. Whittaker, M. A.) साहब ने इस विषय पर एक बहुत बड़ी पुस्तक क्यांब्रिज में छपवाई है जिस का नाम नए विचार की पोथी (Course of modern Analysis) है।

लघुरिक्थ (Logarithms)।

यह गणित हिंदुस्तान में नहीं था। संस्कृत के किसी ग्रंथ में इस की चर्चा नहीं है। बापूदेवशास्त्रीजी ने अपनी त्रिकोणमिति में 'प्रघातमापक' नाम से इस का व्यवहार किया है पर यह कैसे बनाया गया इस की कुछ चर्चा नहीं की। मैं समझता हूँ कि सब से पहले संस्कृत में मैंने ही अपने 'दीर्घवृत्तलक्षण' में इस के जानने की विधि लिखी है। मैंने ही इस का नाम 'लघुरिक्थ' रक्खा है। मरने के बाद बाप जो कुछ धन छोड़ जाता है उसे संस्कृत में 'रिक्थ' कहते हैं। जैसे १०° इस के मर जाने पर जो ७ रह जाता है उसे कह सकते हैं कि लघु-(छोटा) रिक्थ है। अँगरेजी नाम से नाम मिलता रहे जिस में अँगरेजी और संस्कृत दोनों भाषाओं के जाननेवालों को नाम याद रखने में सुभीता पड़े और नाम भी एक तरह से सार्थक हो इस लिये मैंने 'लघुरिक्थ' नाम रक्खा है।

जान नेपियर (John Napier) स्काटल्यांड

में मर्चिस्टन के ब्यारन (Baron of merchiston) थे। इन का जन्म सन् १५५० ई. और मरण सं. १६१७ ई. अप्रिल की २ तारीख को हुआ था।

बड़े अचरज की बात है कि जब लघुरिक्थ जानने के लिये $y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$ यह सिद्धान्त नहीं जाना गया था उस के पहले ही नेपियर ने लघुरिक्थों को निकाला है। स्टीफेल (Stifel) और स्टीवेन (Stiven) के मन में यह बात आई थी कि संख्याओं को किसी एक संख्या के घातरूप में लावे पर उन दोनों को लघुरिक्थ का पता न लगा।

हारियोट (Harriot) का बीज नेपियर के मरने के बहुत पीछे प्रकाश हुआ पर उस में भी लघुरिक्थ की चर्चा नहीं है। बहुत दिनों तक इस का पता न था कि लघुरिक्थ एक किसी संख्या का घातांक है। पीछे से सब से पहले यूलर (Euler) ने इस बात का पता लगाया कि संख्याओं के लघुरिक्थ एक किसी स्थिरसंख्या के घातांक हैं।

नेपियर सिद्धांती थे (Astronomer)। ग्रहों के गणित में जीवा, कोटिज्या, ... के गुणन, भजन में बड़ी मेहनत पड़ती थी और समय भी बहुत खराब होता था उन को बचाने के लिये उन्होंने १०° त्रिज्या में पहले जीवाओं का लघुरिक्थ बनाया।

नेपियर ने लघुरिक्थ बनाने का ऐसा प्रकार लिखा है—

मानो कि अक एक नियत ग अ क
रेखा = १०° = त्रिज्या, और
दूसरी घच्च अपरिमित रेखा घ छ च
घ से अनंत दूर च तक चली गई है। ग बिंदु अक में और छ बिंदु घच में अ और घ स्थान से एक ही क्षण में क और च

की ओर इस तरह से चलती है कि पहले क्षण में दोनों की एक ही गति है और हर एक क्षण में छ की समान गति है पर ग की गति किसी क्षण में गक के संबंध से घटती जाती है। मानो कि जब ग अग तुल्य चला तो छ घछ तुल्य चला।

नेपिअर (Nupier) घछ को कग का लघुरिक्थ कहते हैं।

जौ कग = र, अक = अ और घछ = य। अ से ग तक चलने में या घ से छ तक चलने में जो सेकेंड हुए उन्हें का कहे तो 'चलनकलन' (Differential) से जौ अग = अ—र तो ग का वेग कल्पनानुसार

$$r = \frac{\text{ता (अ—र)}}{\text{ताका}} \therefore \text{ताका} = -\frac{\text{तार}}{r} \text{ और चलराशिकलन से}$$

$$- \text{लार} = \text{का} + \text{स्थि। यहाँ जब } r = \text{अ} = 10^\circ \text{ तो का} = 0$$

इस लिये स्थि = -ला 10° । और य = का · अ जौ एक सेकेंड में छ की गति अ मानें। का और स्थिर का उत्थापन देने से

$$y = \text{का} \cdot \text{अ} = 10^\circ (-\text{लार} - \text{स्थि}) = 10^\circ \text{ ला } \frac{10^\circ}{r} \text{। इस लिये नेपिअर की परिभाषा से—}$$

$$r \text{ का नेपिअर का लघुरिक्थ} = 10^\circ \text{ ला } \frac{10^\circ}{r} \text{।}$$

इस से साफ है कि नेपिअर का लघुरिक्थ आज कल का प्रचलित नेपिअर-लघुरिक्थ नहीं है।

नेपिअर ने अक = 10° को त्रिज्या (व्यासार्ध) और र को किसी चाप की जीवा माना था और ऊपर की क्रिया से जीवा का लघुरिक्थ निकाला था। इस में संशय नहीं कि नेपिअर का लघुरिक्थ एक तरह का लघुरिक्थ ही है। जौ $r = 10^\circ$ तो नेपिअर का लघुरिक्थ शून्य होगा याने नेपिअर के मत

से त्रिज्या 10° का लघुरिक्थ शून्य है। नेपिअर को यह नहीं मालूम हुआ कि मेरा लघुरिक्थ किस आधार (base) में है। ऊपर दिखाए हुए प्रकार से नेपिअर ने 10° के भीतर एक एक कला की बढ़ती से सब कलाओं की जीवा और स्पर्शरेखा के लघुरिक्थों की एक सारणी बनाई थी।

जौ $r = 10^1, 10^2, 10^3, \dots, 10^\circ$, यह गुणोत्तर श्रेणी में हो तो नेपिअर का लघुरिक्थ

$$= 20^\circ \times m \text{ (६, ५, ४, ...) एक अंतर श्रेणी में होगा।}$$

10° आधार के लघुरिक्थ को जिस स्थिरसंख्या से गुण देने से e आधार का लघुरिक्थ होता है उस स्थिर का मान = m है।

बहुतों का मत है कि आज कल प्रचलित लघुरिक्थ का मूल-पुरुष बर्गी (Bürgi) है। इस का ग्रंथ नेपिअर के ग्रंथ से बहुत पीछे प्रकाशित हुआ इस से यूरोप में लघुरिक्थ निकालने का आदर नेपिअर ही को मिला।

नेपिअर ने त्रिकोणमिति संबंधि जीवा कोटिज्या... की लघुरिक्थ-सारणी बनाई पर बर्गी ने सब साधारण संख्याओं के लघुरिक्थ के लिये सारणी लिखी।

बर्गी ने दो श्रेणीओं को दिखाया—

पहली लघुरिक्थ की, ०, १, २, ३,...

और दूसरी संख्याओं की, $1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots$

अस ने यह भी सोचा कि जौ 10° आधार माना जाय तो दूसरी श्रेणी की संख्याओं में बड़ा सुभीता होगा।

बहुत लोगों का मत है कि पीछे से नेपिअर को भी 10° आधार सूझा था पर आयु पूरी हो जाने से वे आगे कुछ न कर सके।

बर्गी की गुणोत्तर श्रेणी की पोथी (Geometrische Progress Tabulen) में जो सन् १६२० ई. में प्रेम

(Prague) में प्रकाशित हुई, उस में १०^८ से १०^९ तक संख्याओं के लघुरिक्थ लिखे हैं। बर्गी ने संख्याओं के लघुरिक्थों को लाल संख्या (Red Numbers) और संख्याओं को काली संख्या लिखी है।

हेनरी ब्रिग्ज (Henry Briggs) नेपियर के समय सन् १५९४ ई. में लंडन के ग्रेशम (Gresham) कालेज में रेखागणित के प्रोफेसर थे और पीछे से आक्स-फोर्ड (Oxford) में भी सन् १६१९ में प्रोफेसर हुए थे। ये नेपियर के ग्रंथ को देख कर चकित हो गए। अपना सब काम छोड़ कर लंडन से नेपियर के मिलने के लिये स्काटल्यांड चले जिस की खबर नेपियर को भी मिल चुकी थी। ब्रिग्ज को राह में देर हो गई, विलम्ब होने से नेपियर घबड़ा कर एक अपने मित्र से कहने लगा कि हा! जान पड़ता है कि ब्रिग्ज न आवेगा। उसी समय दरवाजे पर खड़खड़ाहट की आवाज आई। दरवाजा खोलने पर ब्रिग्ज झट नेपियर से मिला। पंद्रह मिनट तक दोनों चुपचाप खुशी के मारे एक दूसरे को देखते रह गए। अंत में ब्रिग्ज ने कहा कि मेरे लार्ड! मैं इतनी दूर से सिर्फ आप के देखने और इस लघुरिक्थ के गणित के लिये आप को धन्यवाद देने आया; धन्य आप की बुद्धि जिसने इस अद्भुत गणित का पता लगाया। फिर ब्रिग्ज और नेपियर में इस लघुरिक्थ के ऊपर बहुत बात चीत हुई।

ब्रिग्ज सन् १५५६ ई. में ह्यालिफाक्स (Halifax) के नगीच पैदा हुए थे और क्यांब्रिज् जान्सकालेज (St. John's College) में पढ़े थे। इन का जीवनचरित वार्ड (J. Ward) साहब ने सन् १६४० ई. में छपा है। ये सन् १६३० ई. के जनवरी की २६ ता. को मरे।

इन्होंने नेपियर की लघुरिक्थसारणी सीख कर

प्रकाश किया कि जौ सब संख्याओं के लघुरिक्थ १० आधार में बनाए जायें तो गणित में बड़ा लाघव हो। फिर इन्होंने ला १ = ० और ला १० = १ मान कर १ — २०००० के और ९०००० — १००००० के लघुरिक्थ १४ दशमलव स्थान तक बनाए।

बीच की छूटी हुई संख्याओं के लघुरिक्थ एक किताब बेचनेवाले हालैंड के गौडा (Gouda) स्थान के आड्रियन् ब्ल्याक (Adrian Vlacq) ने पूरे किए। ब्ल्याक ने उस सारणी में लिखा है कि मेरे मित्र ड डेकर (De Decker) ने इसे पूरी की है।

सब से पहले ब्रिग्ज के साथी गुंटर (Gunter) ने सन् १६२० ई. में एक एक कला की जीवा और स्पर्शरेखा के लघुरिक्थ, ७ दशमलवस्थान तक बनाए। इसी ने सब से पहले Cosine (कोटिज्या) और Cotangent (कोटिस्पर्शरेखा) नाम रखे हैं।

पीछे से ब्रिग्ज (Briggs) ने ब्ल्याक और गेल्लिब्रान्ड (Gellibrand) की मदद से एक दूसरी सारणी बनाई जिस में जीवाओं के लघुरिक्थ १४ दशमलव स्थान तक और स्पर्शरेखा और छेदनरेखा के लघुरिक्थ १० दशमलव स्थान तक हैं। यह सारणी ब्रिग्ज के सन् १६३१ ई. में मरने के बाद स. १६३३ ई. में छपी।

इस में छत्तिस छत्तिस विकला की वृद्धि से जीवा, स्पर्शरेखा, ... के लघुरिक्थ लिखे हैं। सत्रहवीं सदी के अंत में क्ल्यास वूट (Claas Vooght) ने लघुरिक्थ के साथ साथ जीवा, स्पर्शरेखा और छेदनरेखा की भी एक सारणी प्रकाश की। इस में विशेष बात यह थी कि सब अंक तामें के पत्तर पर खोद दिए गए थे।

यूरोप में लघुरिक्थ सारणियों का बहुत प्रचार हो गया। सन् १८७५ ई. में इन सारणियों की संख्याएँ ५५३ थीं जिन में दशमलव स्थानों की संख्या ३ से १०२ तक है।

आज कल व्यवहार में काम लायक ७ दशमलव स्थान तक की सारणी अच्छी समझी जाती है।

जिस सारणी में १०२ दशमलव स्थान हैं उसे पर्वस्ट (H. M. Parkhurst) ने न्यूयार्क में सन् १८७१ ई. में सिद्धान्त-सारणी (Astronomical Tables) के नाम से छपवाया है।

पछि के गणक लोग इन सारणियों की अशुद्धियों को पता लगा लगा कर शुद्ध करते आए हैं।

जो ब्रिग्स (Briggs) की सारणी स. १६२४ ई. में बनी और स. १६२८ ई. में छपी जिस में १ — १००००० के लघुरिक्थ १० दशमलवस्थान तक लिखे हैं उस में ग्लैशर (Glaisher) ने पहले सान दशमलवस्थानों में १७१ अशुद्धियाँ पाई थी जिन में ४८, १ — १०००० के लघुरिक्थों में थीं।

व्ल्याक (Vlacq) ने धीरे धीरे सभी को शुद्ध किया।

न्यूटन ने व्ल्याक की सौधी सारणी में सन् १६५८ ई. में ९८ गार्डिनर (Gardiner) ने सन् १७४२ ई. में १९ वेगा (Vega) ने सन् १७९७ ई. में ५ क्यालेट (Callet) ने सन् १८५५ ई. में २ और स्यांग (Sang) ने सन् १८७१ ई. में २ अशुद्धियाँ पाई। ग्लैशर (Glaisher) ने अच्छी तरह से जाँच कर ठीक किया कि ब्रेमिकर (Bremiker) की सन् १८५७ ई. की छपी स्कान (Schön) की सन् १८६० ई. की छपी, क्यालेट (Callet) की

सन् १८६२ ई. की छपी और ब्रह्म (Bruhns) की सन् १८७० ई. की छपी सारणियों में एक भी अशुद्धि नहीं पाई गई।

सब से पहले जान स्पिडेल (John speidell) ने अपने नए लघुरिक्थ (New Logarithms) नाम के ग्रंथ में जीवा, स्पर्शरेखा और छेदनरेखा के लघुरिक्थ $\log(e)$ आधार में प्रकाश किए।

ज्यौतिषियों को इस लघुरिक्थ की सारणियों से बहुत ही सुभीता हो गया। भारी से भारी गुणन, भजन, वर्ग, वर्गमूल, ... बात की बात में हो जाते हैं।

हिंदुस्तान में यद्यपि लघुरिक्थ की चर्चा किसी पुराने ग्रंथों में नहीं पाई जाती तौ भी परंपरा से बहुत पुराने समय से “एक रत्ती हीरे का मोल १०० रु० है तो चार रत्ती हीरे का क्या मोल होगा जहाँ यह शर्त है कि सवाई तोल चौगुना मोल” यह प्रश्न चला आता है जिसका उत्तर लघुरिक्थ ही से निकलता है।

और लघुरिक्थ की बातें बीजगणित के वर्णन में लिखी जायँगी।

गिनती में वैज्ञानिकों का विशेष विचार।

(१) सब से पहले संसार के पदार्थों को, जो कि आँख से देख पड़ते हैं, गिनने के लिये आदमियों के मन में साधारण अंकों का अनुभव हुआ होगा फिर उन्हीं के आधार से मन में सोचे हुए पदार्थों के गिनने में भी लोग काबिल हुए होंगे।

एक गाय के देखने से जो कुछ समझ पड़ता है उस से दूना दो गाय के देखने से समझ पड़ता है। इसी तरह तीन, चार, ... गायों के देखने से एक गाय के ज्ञान से तीन, चार, ... गुना ज्ञान होगा।

जैसे चार गाय देखने में आईं तो ४ को एक गाय जाति का समुदाय कहेंगे। इसी तरह ४ पैसे का समुदाय एक आना है। एक आने का जौ गिनने में एक मान लें तो कहेंगे कि एक आने के सोरह समुदाय का एक रुपया होगा।

इस तरह सब साधारण संख्याएँ अपने अपने एक के समुदाय हैं और सब समुदाय के तत्त्व उन के एक हैं।

जौ छब्बीस गाही आम को एक सैकड़ा कहा तो कहेंगे कि एक सैकड़े में २६ तत्त्व और एक गाही में ५ तत्त्व हैं।

(२) तत्त्वों की गिनती से मन का यह ज्ञान हो जाता है कि यह समुदाय दूसरे समुदाय से बड़ा, बराबर या छोटा है। इस लिये गिनती की क्रिया में समुदाय के जानने की जरूरत है, अगर वह क्रिया आगे जाकर खतम हो जाय या खतम हो जाने का पक्का ज्ञान हो तो।

यह समझ रखो कि किसी समुदाय के गिनने में उस के तत्त्व एक दूसरे से अलग अलग मौजूद रहते हैं। ऐसा नहीं होता कि किसी का लोप हो जाय या कई एक आपस में मिल जायँ। तोप की आवाज की गिनती में दूसरी गिनती शुरू होते ही पहली आवाज का लोप हो जाता है पर गिननेवाले के मन में वह पहली आवाज मौजूद रहती है।

(३) किसी चीज के समुदाय की गिनती में एक तत्त्व के बाद दूसरा, दूसरे के बाद तीसरा, ... क्रम से आते हैं। इस लिये किसी समुदाय को क्रमिक समुदाय कह सकते हैं।

पहले तत्त्व को दूसरे तत्त्व के वश से छोटे दर्जे का और दूसरे को पहले के वश से बड़े दर्जे का कह सकते हैं।

(४) एक समुदाय का निश्चित तत्त्व दूसरे समुदाय के जिस निश्चित तत्त्व से बराबरी करता है उसे जोड़ी का तत्त्व

कहते हैं।

जौ एक समुदाय में कोई ऐसा तत्त्व न हो जो दूसरे समुदाय के किसी तत्त्व का बराबरी कर सके तो कहेंगे कि दोनों समुदायों में एक ऐसा समुदाय है जिस में दूसरे के हिसाब से बहुत अधिक तत्त्व हैं।

इस तरह से एक, समुदाय, क्रम और जोड़ी, ये चार मुख्य पदार्थ हैं जो कि सब से पहले अज्ञानी मनुष्यों के मन में गिनती करने के लिये पैदा हुए फिर इन्हीं चारों मूल पदार्थों पर से ज्ञानी लोग अनेक पदार्थों का पता लगा चुके और आगे भी लगाते चले जाते हैं।

(५) जौ एक क्रमिक समुदाय में से कुछ तत्त्व हटा दिए जायँ तो बाकी समुदाय पहले समुदाय का एक भाग कहा जायगा।

जौ नीचे लिखे हुए धर्म पाए जायँ तो क्रमिक समुदाय को परिच्छिन्न कहेंगे।

(अ) जिस में एक ऐसा तत्त्व हो जो और किसी तत्त्वों से छोटे दर्जे का हो।

(क) जिस में एक ऐसा तत्त्व हो जो और किसी तत्त्वों से बड़े दर्जे का हो।

(ख) जिस के किसी भाग में एक तत्त्व ऐसा हो जो उस भाग के और किसी तत्त्व से छोटे दर्जे का हो और एक ऐसा भी तत्त्व हो जो इस भाग के और किसी तत्त्व से बड़े दर्जे का हो।

इन से यह सिद्ध होता है कि परिच्छिन्न समुदाय और इस के कोई भाग के आदि में एक और अंत में एक तत्त्व रहेगा।

परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय का हर एक भाग भी एक क्रमिक समुदाय होगा।

जौँ मा समुदाय का मा, भाग मानो तो मा, में सब से बड़े और सब से छोटे दर्जे का एक एक तत्त्व रहेगा और मा, के हर एक भाग में मा का भी भाग होने से एक सब से छोटे दर्जे का और एक सब से बड़े दर्जे का तत्त्व रहेगा इसलिये मा, आप एक परिच्छिन्न समुदाय होगा।

(६) जिन में पूरे तौर से जोड़ी के तत्त्व हों ऐसे दो परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय सजातीय कहे जाते हैं याने जौँ एक के एक एक तत्त्व दूसरे के एक एक तत्त्व के जोड़ी के हों ऐसा कि एक के कोई दो 'पा' 'का' तत्त्व दूसरे के कोई 'पा' 'का' तत्त्व के जोड़ी के हों और जौँ पा, का से छोटे दर्जे का हो तो पा, भी का से छोटे दर्जे का हो और जौँ पा का से बड़े दर्जे का हो तो पा भी का से बड़े दर्जे का हो तो दोनों समुदाय सजातीय कहे जायेंगे।

इस से सिद्ध होता है कि दो सजातीय परिच्छिन्न क्रमिक समुदायों में एक ही साधारण संख्या है।

जौँ दो क्रमिक समुदायों में हर एक तीसरे समुदाय का सजातीय हो तो वे दोनों आपस में भी सजातीय होंगे। इस की उपपत्ति बहुत सहज है।

इस से सिद्ध होता है कि सजातीय क्रमिक समुदायों में कोई एक ही नियत साधारण संख्या स्थिर रहती है।

(अ) जिस समुदाय में एक ही तत्त्व आ है उस में नियत साधारण संख्या एक है जिसे १ इसे चिह्न से प्रकाश करते हैं। इस से सिद्ध है कि जिन समुदायों में एक ही तत्त्व है सब में नियत संख्या १ है। इसी में जौँ एक नया तत्त्व 'का' मिला दे तो नया समुदाय (आ, का) होगा जहाँ आ तत्त्व से का का दर्जा ऊँचा है याने दर्जे में आ छोटा और का बड़ा है

तो (आ, का) समुदाय में नियत संख्या २ होगी।

इस में फिर तीसरा तत्त्व गा दोनों से ऊँचे दर्जे का मिलावे तो (आ, का, गा) समुदाय में नियत संख्या ३ होगी। इस तरह से (आ, का, गा, ..., जा) इस समुदाय में नियत संख्या न कहो और एक तत्त्व सब से ऊँचे दर्जे का झा इस में मिलाओ तो (आ, का, गा, ..., जा, झा) समुदाय में जौँ नियत संख्या न हो तो साफ है कि न से भिन्न न है।

इस तरह से जितने क्रमिक समुदाय बनेंगे सब परिच्छिन्न होंगे।

इस की उपपत्ति। मानो कि एक परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय मा है तो मा के सब तत्त्वों से एक ऊँचे दर्जे का तत्त्व त मिलाने से नया (मा, त) यह समुदाय भी परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय होगा क्योंकि मा में सब से छोटे दर्जे का एक तत्त्व है, वही (मा, त) में भी सब से छोटे दर्जे का है और (मा, त) में सब से बड़े दर्जे का त तत्त्व है।

फिर मानो कि मा, एक (मा, त) का ऐसा भाग है जिस में त नहीं है तो मा, मा का एक भाग होगा इसलिये इस में एक सब से छोटे दर्जे का और एक सब से बड़े दर्जे का तत्त्व होगा। जौँ मा, में त तत्त्व हो तो मानो कि $मा, = (मा, त)$ जहाँ मा, मा का कोई भाग है इसलिये मा, परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय होगा। इसलिये इस में एक सब से छोटे दर्जे का तत्त्व होगा और सब से बड़े दर्जे का तत्त्व त-तो है ही इसलिये पिछले सिद्धान्तों से (मा, त) परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय हुआ।

(आ) और (आ, का) साफ है कि परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय हैं इसलिये अनुगम से (आ, का, गा) भी परि-

च्छिन्न क्रमिक समुदाय हुआ। इस तरह आगे के सब समुदाय परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय होंगे। इस से सिद्ध होता है कि एक क्रमिक समुदाय में जिस में एक तत्त्व है एक एक नए तत्त्व के मिलाने से जितने समुदाय होंगे सब परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय होते जायेंगे।

इस की उलटी क्रिया से यह सिद्ध कर सकते हो कि कोई परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय में एक एक तत्त्व के घटाते घटाते अंत में एक ऐसा समुदाय होगा जिस में एक ही तत्त्व रहेगा।

कोई परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय अपने भाग के सजातीय नहीं हो सकता।

इस की उपपत्ति अनुगम से इस तरह से होती है। मानो कि एक मा परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय अपने भाग के सजातीय नहीं है तो (मा, त) यह मा के सजातीय नहीं होगा। जौ हो तो मानो यह अपने मा, भाग के सजातीय है तो जौ मा, में त तत्त्व हो तो यह (मा, त) इस तरह का होगा और (मा, त) जौ (मा, त) के सजातीय हो तो मा, यह जरूर मा के सजातीय होगा जो कि मान लिये गए धर्म से उलटा है क्योंकि मा अपने कोई भाग के सजातीय नहीं है ऐसा मान लिया गया था। जौ मा, में त तत्त्व न हो तो मा, जरूर [मा, फ] ऐसा होगा। ऐसी दशा में फ का जोड़ी त होगा इसलिये फिर मा का सजातीय उस का एक भाग मा, होगा जो मान ली गई बात से उलटा है। [आ, का], अपने भाग [आ] के सजातीय नहीं है इसलिये ऊपर की युक्ति से [आ, का, गा] यह भी अपने भाग का सजातीय नहीं है। इस तरह [आ, का, गा, ...] ये सब समुदाय अपने पिछले समुदायों के सजातीय नहीं हैं। तब [आ],

(आ, का), ... ये सब एक से एक भिन्न हैं इसलिये इन की नियत संख्याएँ १, २, ३, ... भी सब एक से एक भिन्न हैं यह सिद्ध हुआ। इसलिये १, २, ३, ... सब साधारण संख्याएँ आपस में जुदी जुदी और खाली चीज हैं।

जैसा नीला रंग और नीले घड़े में संबंध है उसी तरह का संबंध साधारण संख्या और उस संबंधी पदार्थ में है।

(७) परिच्छिन्न और बढ़ता हुआ समुदाय वह क्रमिक समुदाय है जिस में और सब तत्त्वों से ऊँचे दर्जे का कोई तत्त्व न हो और वह समुदाय इस तरह का भी है जिस का कोई भाग, जिस में एक तत्त्व उस भाग के और सब तत्त्वों से ऊँचे दर्जे का है, परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय है।

इस से यह भी सिद्ध होता है कि अपरिच्छिन्न क्रमिक समुदाय में एक तत्त्व और तत्त्वों से छोटे दर्जे का है उस के किसी भाग में भी एक तत्त्व उस भाग के और तत्त्वों से छोटे दर्जे का है।

परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय और अपरिच्छिन्न क्रमिक समुदाय का अंतर रूप समुदाय में ऊपर की युक्ति से कोई तत्त्व और दूसरे तत्त्वों से ऊँचे दर्जे का नहीं है इस लिये अंतर रूप समुदाय भी अपरिच्छिन्न क्रमिक समुदाय है।

(८) जौ कोई परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय किसी तरह से तत्त्वों के उलट पलट देने से फिर एक नया क्रमिक समुदाय बनाया जाय तो यह नया समुदाय परिच्छिन्न होगा और इस की नियत संख्या वही होगी जो कि पहले समुदाय की है।

इस की उपपत्ति के लिये पहले मानो कि भा यह एक परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय है इस में सब तत्त्वों से ऊँचे दर्जे

का एक तत्त्व मिला देने से (भा, त) यह समुदाय (त, भा) इस समुदाय से जहाँ त सब से छोटे दर्जे का है, सजातीय होगा, यह सिद्ध करना है।

मानो कि भा \equiv (भा_१, फ) और यह भी मानो कि ऊपर का सिद्धान्त भा_१ में ठीक है याने (भा_१, त), (त, भा_१) के सजातीय है तो इन दोनों में पूरे तौर से जोड़ी के तत्त्व होंगे इस लिये (भा_१, त, फ) और (त, भा_१, फ) में भी जोड़ी के तत्त्व होंगे। (भा_१, त, फ) और (भा_१, फ, त) ये दोनों सजातीय होंगे क्योंकि भा_१ तो दोनों में एक ही है, त और फ क्रम से फ और त के जोड़ी तत्त्व हैं इस लिये

(भा_१, फ, त) यह (त, भा_१, फ) के सजातीय हुआ याने (भा, त) के सजातीय (त, भा) हुआ इस लिये ऊपर का सिद्धान्त ठीक हुआ जौ भा \equiv (भा_१, फ) में भा_१ में वह नियम हो तो। पर भा_१ में एक तत्त्व हो तो सिद्धान्त ठीक है इस लिये अनुगम से परिच्छिन्न क्रमिक भा समुदाय में भी ऊपर का सिद्धान्त ठीक हुआ।

इस सिद्धान्त की सर्वसाधारण दशा में सिद्ध करने के लिये मानो कि मा समुदाय में सिद्धान्त ठीक है तो (मा, त) इस में भी ठीक होगा। इस के लिये कल्पना करो कि मा के तत्त्वों के उलट पलट करने से नया क्रमिक समुदाय (रा, त, सा) ऐसा हुआ। तो (रा, त, सा), (रा, सा, त) के सजातीय होगा क्योंकि रा तो दोनों में एक ही है इस लिये इन में जोड़ी के तत्त्व रहें ही गे और ऊपर की युक्ति से (त, सा) और (सा, त) सजातीय हैं। मा को मान लिया है कि (रा, सा) के सजातीय है इस से सिद्ध हुआ कि (रा, सा, त), (मा, त) के सजातीय है इस लिये (रा, ता, सा) भी (मा, त) के सजातीय हुआ। साफ है कि (आ, का) समुदाय में सिद्धान्त ठीक है जहाँ कि दाही

तत्त्व हैं इस लिये अनुगम से हर एक परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय में यह सिद्धान्त सच्चा हुआ।

इस सिद्धान्त से सिद्ध होता है कि किसी समुदाय में, जिस में तत्त्वों के उलट पलट करने से एक परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय बनता हो, साधारण नियत संख्या स्वतंत्र एक ही रहती है चाहे उस समुदाय में तत्त्वों का क्रम कैसा ही हो।

पूरे अंकों का परिकर्म।

(९) जौ दो परिच्छिन्न क्रमिक समुदाय आ और का हों जिन की नियत संख्या क्रम से अ और क हैं तो जौ इन दोनों के योग से एक समुदाय बनाना हो जिस में आ के सब तत्त्व का के सब तत्त्वों से छोटे दर्जे के हों और जिस में आ के कोई दो तत्त्व और का के कोई दो तत्त्व वही क्रम से संबंध रखते हों जो कि पहले आ और का में संबंध रखते थे तो इस योग-रूप समुदाय की साधारण नियत संख्या अ + क होगी।

यह दिखला सकते हो कि यह एक नया समुदाय परिच्छिन्न है और इस की साधारण संख्या एक ही रहेगी जौ आ और का के स्थान में उन के सजातीय समुदाय रख दें। इस तरह से समझ पड़ता है कि योग अ + क एक परिच्छिन्न संख्या है जो खाली अ और क के आधीन है।

(आ, का) समुदाय में सब से छोटे दर्जे का तत्त्व वही है जो कि आ में सब से छोटे दर्जे का है और सब से ऊँचे दर्जे का तत्त्व वही है जो कि का में सब से ऊँचे दर्जे का है; और (आ, का) इस का कोई भाग (आ, का) ऐसा होगा जहाँ आ और का क्रम से आ और का के कोई भाग हैं या उस भाग में आ और का में से कोई एक भाग रहेगा।

और आ, का दोनों में एक सब से छोटा और एक सब से बड़ा तत्त्व है इस लिये (आ, का) के कोई ऊपर के ऐसे भाग में एक तत्त्व सब से छोटा और एक सब से बड़ा रहेगा। इस तरह (आ, का) परिच्छिन्न है।

फिर आ_१, का_१ जौँ क्रम से आ, का के सजातीय हों तो आ के हर एक तत्त्व को आ_१ के उसके जोड़ी तत्त्व के स्थान में और का के हर एक तत्त्व को का_१ के उसके जोड़ी तत्त्व के स्थान में रख सकते हैं। ऐसा करने से (आ, का) और (आ_१, का_१) के तत्त्वों के बीच एक जोड़ी तत्त्व (१, १) ऐसा होगा। इस लिये (आ, का) की साधारण नियत संख्या वही है जो कि (आ_१, का_१) इस की है।

(आ, का) और (का, आ) में साधारण नियत संख्या एकही है इस लिये $अ + क = क + अ$ जो कि जोड़ने की क्रिया से प्रसिद्ध है।

ध्यान दे कर सोचो तो साधारण संख्या का कुछ भी अर्थ नहीं है जब तक कि उस से कोई समुदाय न दिखाया जाय। इस लिये जब तक दो, तीन, ... समुदाय न जोड़े जायेंगे तब तक साधारण संख्याओं के योग का भी कुछ अर्थ नहीं है।

(१०) एक परिच्छिन्न समुदाय मान में जिस की संख्या 'क' है, जौँ हर एक तत्त्व के स्थान में एक दूसरा परिच्छिन्न समुदाय जिस की संख्या 'अ' है, रख दिया जाय तो इस तरह से बने हुए नए समुदाय की संख्या को अ से गुणित क का गुणनफल कहते हैं और यह अ, क इस से दिखाया जाता है।

ऊपर की युक्तियों से प्रसिद्ध है कि वह नया समुदाय परिच्छिन्न होगा और उस के स्थान में उस के सजातीय समु-

दायों के रख देने से उस की संख्या ज्यों की त्यों रहेगी। इस लिये अ.क भी परिच्छिन्न होगा।

यह प्रसिद्ध है कि $अ.क = अ + अ + अ + \dots$ क स्थान तक।

जो नया बना क्रमिक समुदाय है उस में तत्त्वों के क्रम इस तरह से बदल दें कि जिन समुदायों की संख्या अ है सभों में से पहला पहला तत्त्व ले कर एक, दूसरा दूसरा तत्त्व लेकर दूसरा, इस तरह से समुदाय बना कर उन को क्रम से रख दें तो ऐसा एक समुदाय बनेगा जिस की संख्या अ है और जिस के हर एक तत्त्व के स्थान में वह समुदाय रक्खा गया है जिस की संख्या क है। इस नए समुदाय की संख्या क.अ होगी और इस की संख्या पहले समुदाय की संख्या के बराबर होने से $क.अ = अ.क$ जो कि गुणने की क्रिया से प्रसिद्ध है।

जौँ अ और क संख्या का योग ग संख्या हो तो ग में से क को अलग कर लेने से अ रह जायगा। ऐसी दशा में कहेँगे कि योगक्रिया से घटाने की क्रिया उलटी है। जौँ $ग = अ + क$ तो $अ = ग - क$, क्योंकि $(ग - क) + क = ग$ । इस से सिद्ध होता है कि घटाने का कर्म तभी तक संभव है जब तक $ग > क$ ।

जो दो संख्याओं (अ, क) का गुणनफल ग संख्या हो तो अ का ज्ञान ग और क के ज्ञान से होता है। ऐसी स्थिति में ग को क से भाग देने से अ आवेगा और कहेँगे कि गुणन-क्रिया से भाग-क्रिया उलटी है। इस से सिद्ध होता है कि $ग = क, २क, ३क, \dots$ ऐसा ही होगा तभी भाग-क्रिया की संभावना है।

भिन्न संख्या।

ऊपर दिखा आए हैं कि पूरी दो संख्याओं का गुणनफल सदा संभव है पर भाग तभी संभव है जब भाज्य में पूरा पूरा भाजक पूरी लब्धि बार घट जाय। पुराने लोगों को हिस्सा बाटने में

जब भाजक पूरा पूरा भाज्य में न घटा होगा तब बड़ी दिकत पड़ी होगी। उस को मिटाने के लिये पूरे अंकों के हिस्से करने की क्रिया मन में आई होगी फिर उन हिस्सों के जोड़ने, घटाने, गुणने और भाग लेने की क्रिया भी सोची गई होगी।

नैयायिकों के मत से, जहाँ समुदाय पर से पूरे अंकों के योग, अंतर, ... ऊपर दिखा आए हैं, भिन्न संख्या, संख्या की गिनती में नहीं है पर गणक लोग भिन्न में भी जोड़ना, घटाना, ... वैसे ही करने लगे जैसे कि पूरी संख्या में करते हैं इस लिये इस को भी भिन्न-संख्या के नाम से पुकारने लगे। अ से यह समझा जाता है कि किसी जाति के एक का बराबर क हिस्सा किया गया है और वैसे वैसे अ हिस्से लि गए हैं।

आज कल के वैज्ञानिक लोग भिन्न संख्या को (अ, क) ऐसे लिखते हैं जिसे गणक अ इस संकेत से लिखते हैं।

मैं इस छोटी सी पोथी में गणित का इतिहास लिखने बैठा हूँ इस लिये नए मत का कुछ वर्णन कर दिया। जिस को सब बाते जानने की इच्छा हो वह हाब्सन (E. W. Hobson) साहब की बनाई सन् १९०७ की छपी वास्तव चल के फलों के सिद्धान्त (The Theory of Functions of A real variable) को देखे। अब ज्ञानी लोग अपनी बुद्धि के प्रभाव से चाहे जो तरङ्ग निकालें पर वही मूल पुरुष धन्य है जिसने इन अंकों की सूरत और दशगुने स्थान बनाए।

वैदिक परिभाषा और गणित।

आज कल जो ८ यव का अंगुल, २४ अंगुल का हाथ, ... परिभाषाएँ हैं उनसे और वैदिक परिभाषाओं से भेद है।

बोधायन महर्षि अपने शुल्बसूत्र में अंगुल का लक्षण लिखते हैं—

चतुर्दशाणवः। चतुर्विंशत्तिलाः पृथुसंश्लिष्टा इत्यपरम्।

अणु छोटे अन्न सौंवा, काँक, सरसो, ... को कहते हैं। चौदह अणु अन्न या चौ तीस तिल की लंबाई की ओर मिला कर रखने से एक अंगुल होता है।

दशाङ्गुलं क्षुद्रपदम्। द्वादश प्रादेशः।

दश अंगुल का एक छोटा पैर और बारह अंगुल का प्रादेश होता है। अंगूठा और पहली अंगुली को फैलाने से जो अंतर हो उसे प्रादेश कहते हैं।

अष्टाशीतिशतमीषा। चतुःशतमक्षः। वडशी-तिर्युगम्।

११८ अंगुल की ईषा, ४०० अंगुल का अक्ष और ८६ अंगुल का युग होता है। गाड़ी में जो लंबी लकड़ी रहती है उसे ईषा, धुरी को अक्ष और जूग को, जिस में दोनों बेल जुटे रहते हैं, युग कहते हैं।

द्वात्रिंशज्जानुः। षट्त्रिंशच्छम्याबाहु। द्विपदः प्रक्रमः। द्वौ प्रादेशावरलिः।

३२ अंगुल की जाँघ, ३६ अंगुल की शम्या और बाहु, दो पैर (२० अंगुल) का एक प्रक्रम और दो प्रादेश (२४ अंगुल) का एक अरलि (हाथ) होता है।

पञ्चारलिः पुरुषः।

पाँच अरलि (१२० अंगुल) का एक पुरुष (पोरिसा) होता है।

पुराने समय में बोधायन ने भी नापने में पैर (Foot) को लिया है जैसा कि आज कल यूरोप के लोग फुट को लेते हैं।

बोधायन अपने शुल्बसूत्र के ४७वें सूत्र में लिखते हैं कि—

प्रमाणं द्वादशाङ्गुलं तिर्यक् । तस्य द्विकरणी तिलोनसप्तदशाङ्गुला पार्श्वमानी । एवंभूतस्य दीर्घचतुरस्रस्याक्षण्या रज्जुर्विंशतिरङ्गुलयः सप्तविंशतिस्तिलाश्च । सा त्रिकरणी प्रमाणविमितक्षेत्रं त्रिगुणं क्षेत्रं करोति । तृतीयकरण्येतेन व्यख्याता नवमस्तु भूमेर्भागो भवतीति ।

एक बारह अंगुल प्रमाण की तिरछी रेखा करो उस के एक प्रान्त पर एक तिल कम सत्रह अंगुल की पार्श्वमानी याने लंबरूप दूसरी (कोटि) रेखा करो । इन दोनों से बने लंबे आयत का कर्ण (अक्षण्या रज्जु) बीस अंगुल और सत्ताइस तिल होता है । वह त्रिकरणी (पहले वर्गक्षेत्र के तिगुने वर्गक्षेत्र का भुज) है, उस से बना वर्गक्षेत्र (पहले वर्ग-) क्षेत्र का तिगुना (वर्ग-) क्षेत्र बनाता है । इस की तृतीय करणी (भुज के तीसरे हिस्से को भुज मान कर बना वर्गक्षेत्र) पहले वर्ग के नवें हिस्से के बराबर होती है ।

यहाँ पहले वर्गक्षेत्र का कर्ण $= \sqrt{2 \text{ भु}^2} = \sqrt{2 \times 22} = \sqrt{2 \times 29} = 17 - \frac{1}{2 \times 17} = 17 - \frac{1}{34} = 17 \text{ अंगुल} - \text{एक तिल, खल्वान्तर से । और } 12 \text{ और } \sqrt{2 \times 22} \text{ भुज-कोटि पर से कर्ण}$
 $= \sqrt{\text{भु}^2 + \text{को}^2} = \sqrt{144 + 22} = \sqrt{3 \text{ भु}^2} =$

$\sqrt{432} = (400 + 32)^{\frac{1}{2}} = 20 + \frac{32}{40} = 20 + \frac{4}{5}$
 $= 20 \text{ अं.} + \frac{4 \times 34}{5} \text{ ति.} = 20 \text{ अं.} + \frac{136}{5} \text{ ति.} = 20 \text{ अं.} + 27 \frac{1}{5} \text{ ति.}$
 $= 20 \text{ अं.} + 27 \text{ तिल, खल्वान्तर से बोधायन की क्रिया से ठीक है ।}$

बोधायन आगे अपने शुल्बसूत्र के ६१-६२वें सूत्रों

में ऊपर लिखे हुए प्रकार के ऊपर विशेष लिखते हैं ।

प्रमाणं तृतीयेन वर्धयेत् तच्च चतुर्थेनात्मचतुर्विंशोनेन ॥ ६१ ॥

द्वादशाङ्गुलं चतुरङ्गुलेन वर्धयेत् । तच्चतुर्थं स्वीयचतुर्थेन स्वचतुर्विंशोनेन तिलोनेनैकाङ्गुलेन वर्धयेत् । एवं तिलोनसप्तदशाङ्गुलो भवति । सविशेषः ॥ ६२ ॥

६१वें सूत्र से बोधायन ने $\sqrt{2 \text{ भु}^2} = \text{भु} \sqrt{2}$
 $= \text{भु} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}) = \text{भु} + \frac{\text{भु}}{2} + \frac{\text{भु}}{8} - \frac{\text{भु}}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$
 $= \text{कर्ण} । इस में भुज के स्थान में १२ अंगुल रख देने से$

कर्ण $= \sqrt{2 \text{ भु}^2} = \sqrt{2 \times 144} = 12 + \frac{12}{2} + \frac{12}{8} - \frac{12}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$
 $= 12 + 6 + 1 - \frac{1}{3} = 19 - \frac{1}{3} = 19 \text{ अं.} - 1 \text{ तिल ।}$
 मैं समझता हूँ कि बोधायन ने पहले एक प्रादेश याने १२ अंगुल के तिलों $(= 12 \times 34 = 408)$ को भुज मान कर तिल तक सूक्ष्मगणना के लिये वर्गक्षेत्र के कर्ण को तिल में लाए याने

कर्ण $= \sqrt{2 \times 408^2} = \sqrt{2 \times 166464} = \sqrt{332928}$
 $= 577 \text{ खल्वान्तर से, इस में फिर प्रादेश बनाने के लिये } 408$
 का भाग दे देने से

$\frac{332928}{408} = 1 + \frac{252}{408}$ यह लाए । फिर $\frac{252}{408}$ इस भिन्न को अहमेस के ऐसा एक अंशवाले भिन्नो के योगरूप में लाए । जैसे—

$$\frac{252}{408} = \frac{252}{408} + \frac{2}{408} - \frac{1}{408} = \frac{253}{408} - \frac{1}{408}$$

$$= \frac{253}{12 \times 34} - \frac{1}{12 \times 34} = \frac{252}{12 \times 34} = \frac{21}{12 \times 34}$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12 \times 34} = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12 \times 34}$$

‘भु’ भुज का कर्ण $= \text{भु} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}) ।$

बहुत लोगो^१ का मत है कि बोधायन को वर्गमूल निकालने की क्रिया जो ऊपर लिख आए है^१ नहीं मालूम थी उन्हो^१ ने नापने की शलाका से कर्ण को नाप लिया था। जौ^१ यह बात हो तो बोधायन की नापने की शलाका (स्केल) बहुत ही सही और सूक्ष्म थी जिस से तिल तक का पता लग गया।

इस ग्रंथ के रेखागणितवर्णन के भाग में वैदिक रेखागणित का विशेष वर्णन किया जायगा।

संख्याओं के संस्कृत शब्द।

१ = एक, रूप, जमीन के नाम (भू, भूमि, धरणी, ...), चन्द्र-मा के नाम (चन्द्र, शशी, ...)।

२ = द्वौ, युग्म, दस अश्विनौ, यम के नाम (यम, अंतक, ...), हाथ के नाम (हस्त, कर, ...), आँख के नाम (नेत्र, दृक्, ...), पक्ष, युग।

३ = त्रीणि, लोक, शिवनेत्र, आग के नाम (अग्नि, अनल, ...), राम, गुण, क्रम।

४ = चत्वारि, समुद्र के नाम (अब्धि, जलधि, ...), वेद, श्रुति, अष्टका, कृत, युग।

५ = पञ्च, प्राण, शर के नाम (बाण, इषु, ...), इन्द्रिय, हवा के नाम (वायु, पवन, ...), भूत, बुद्धि के नाम (धी, मेधा, ...)।

६ = षट्, ऋतु, शत्रु के नाम (अरि, रिपु, ...), रस, अंग, तर्क।

७ = सप्त, पहाड़ के नाम (अचल, नग, ...) स्वर, प्राचीनो^१ के मत से पवन, वायु, ..., मुनि, घोड़े के नाम (अश्व, हय, ...)।

८ = अष्ट, हाथी के नाम (दन्ती, करी, ...), साँपो^१ के नाम (नाग, अहि, ...), मङ्गल, बसु।

९ = नव, नन्द, अंक, निधि, ग्रह, छेद के नाम (छिद्र, रन्ध्र, विवर, अंतर, ...)। फलित में छिद्र से आठवाँ स्थान लेते हैं^१।

१० = दश, पंक्ति, दिशा के नाम (दिक्, काष्ठा, ...), कहीं^१ कहीं^१ रात्रण-मुख से भी दश लेते हैं^१ पर गणित में यह नाम नहीं मिलता।

११ = एकादश, महादेव के नाम (रुद्र, शिव, ...)।

१२ = द्वादश, सूर्य के नाम (रवि, मित्र, ...) कभी कभी शङ्कु से भी १२ लेते हैं^१।

१३ = त्रयोदश, विश्वेदेव के नाम।

१४ = चतुर्दश, इन्द्र के नाम (शक्र, सुरराज, ...), मनु।

१५ = पञ्चदश, दिन, तिथि, ...।

१६ = षोडश, अष्टि, राजा के नाम (भूप, नृप, ...)।

१७ = सप्तदश, अत्याष्टि, घन।

१८ = अष्टादश, धृति, पुराण,

१९ = ऊनविंशति, वेद में नवविंशति, अतिधृति।

२० = विंशति, नह के नाम (नख, करज, ...), कृति।

२१ = एकविंशति, मूर्च्छना, स्वर्ग, प्रकृति।

२२ = द्वाविंशति, आकृति।

२३ = त्रयोविंशति, विकृति।

२४ = चतुर्विंशति, जिन, सिद्ध, अर्हत्, पञ्चसिद्धान्तिका में काष्ठा से भी कहीं^१ कहीं^१ परमक्रान्ति २४ ली गई है।

२५ = चतुर्विंशति, तत्त्व।

२६ = पञ्चविंशति, उत्कृति।

^१ मेरी छपवाई भट्टोत्पलटीकासहित बृहत्संहिता के २५ पृष्ठ की टिप्पणी देखो।

- २७ = सप्तविंशति, नक्षत्र के नाम (भ, तारा, ...) ।
 २८ = अष्टाविंशति ।
 २९ = ऊनत्रिंशत्, वेद में नवविंशति ।
 ३० = त्रिंशत् ।
 ३१ = एकत्रिंशत् ।
 ३२ = द्वात्रिंशत्, दाँत के नाम (दन्त, दशन) ।
 ३३ = त्रयस्त्रिंशत्, देवता के नाम (देव, सुर, ...) ।
 ३४-४८ = प्रसिद्ध गिनती में जो नाम आते हैं ।
 ४९ = ऊनपञ्चाशत्, तान ।
 ५०-९९ = प्रसिद्ध गिनती में जो नाम आते हैं ।
 १०० = शत, दशति, दशति कहीं कहीं पुराणों में मिलता है ।
 २६० = भांश, चक्रांश, ज्यौतिषवेदाङ्ग में भांश = २४८ ।
 २१६०० = चक्रकला, भगणकला,

एहि अँगरेजी-राज-बल सब देशन की रीति ।

समुझि बूझि लखि मनन करि भाइन पर करि प्रीति ॥ १ ॥

अंकगणित की कछु कथा लिखी सुधाकर धीर ।

ताहि बाँचि पुरवहु कसर निज बुधि-बल लखि हीर ॥ २ ॥

इति सुधाकरद्विवेदिकृते गणितेतिहासे पाटीगणितेतिहासरूपः

प्रथमभागः समाप्तः ।

इस ग्रंथ में जिन प्रसिद्ध पंडितों के नाम आए हैं संक्षेप से उन के

जीवनचरित्र ।

अब्बासिदी खलीफा अल्मन्सूर (दूसरे) ।

इनका पहला नाम अबूज़ाफर था अपने भाई अबूलअब्बास के मरने पर सन् ७५४ ई० में बग़दाद के दूसरे खलीफा हुए थे । बनी अब्बास या अब्बासिदों के खानदान में होने से इन्हें अब्बासिदी कहते हैं । इन के चाचा, अली के बेटे अब्दुल्लाह आप खलीफा होने के लिये इन से लड़े थे पर इन के सद्दीर अबू मुसल्लिम से मारे गए । ये विद्या के बड़े रसिक थे । बहुत पुस्तकों का अनुवाद अरबी में करवाया । सन् ७७५ ई. में बग़दाद से मक्के जाते समय राह में बीर मैमून स्थान में मर गए । मरने पर इन की लास मक्के में लाई गई । बहुतों के मत से ६३ और बहुतों के मत से ६८ वर्ष की उम्र में मरे और २२ चान्द्र वर्ष तक राज किए । ये बड़े लोभी थे, मरने पर इन के खजाने में ६००,०००,००० दिरहम और २४,०००,००० दीनार मौजूद थे ।

अबुल्-माशर ।

बग़दाद के खलीफा अल-मामून के प्रधान ज्यौतिषी थे । इन का पूरा नाम ज़ाफर बिन-मुहम्मद बिन-उमर अबुल्-माशर है । ये अरबी के फलितज्यौतिषियों के शाहजादे कहलाते हैं । बलख में पैदा हुए थे । जिस संस्कृतगणितसारणी का अनुवाद इन्होंने अरबी में किया है उस का नाम डलूफ या किताब-उल्-डलूफ है । इन के किताब का ल्याटिन-अनुवाद सन् १८५६ ई० में वेनिस में छपा है । ये सन् ८८५ ई० में मरे हैं ।

अमरसिंह ।

राजा विक्रम के नवरत्नों में गिने जाते हैं । नवरत्नों में वराह-मिहिर भी हैं । इस लिये वराहमिहिर के समय में अमरसिंह थे (वराहमिहिर को देखो) ।

अरिस्टोटल (अरस्तू, *Aristotle*) ।

ईशा के ३८४ वर्ष पहले *Stagira* के *Macedonia* स्थान में पैदा हुए और ६२ वर्ष की अवस्था में मरे ।

ये फिलासफर थे । कुछ यंत्रविद्या (*Mechanics*) के प्रश्नों के ऊपर भी विचार किया है ।

अल करीह (*Al Karhi*) ।

बग़दाद के रहनेवाले थे । सन् १००० ई. के आरम्भ में थे । अरब-वालों के बीजगणितों में इन का बीजगणित सब से प्रधान गिना जाता है । इन्होंने दृढसंख्या पर भी बहुत कुछ लिखा है ।

अल कलसडी (*Al Kalsadi*) अबुल हसन

अली बिन मोहम्मद ।

पाटीगणित में बड़े निपुण थे । सन् १४७७ ई. या सन् १४८६ ई. में मरे हैं ।

अल नसवी (*Al Nasawi, Abul Hasan Ali ibn Ahmed*) ।

सन् १००० ई. में खुरासान के फ़ामनस स्थान में थे । गणित के अच्छे पण्डित थे ।

अलहुशेन (*Al hossein*) ।

सन् ९८० ई. में पैदा हुए और सन् १०३७ ई. में मरे । अरब के एक अच्छे गणित के पण्डित थे ।

अशोक ।

ईशामसीह के ३२३ वर्ष पहले बड़े सिकन्दर ने सब लोगों को जीत कर गर्म के दिन में बाविलोन (*Babylon*) में एक दर्बार किया । सर्दारों ने सिकन्दर से कहा कि अपने राज में से हम लोगों को अब जागीर दीजिए ।

सिकन्दर ने कहा कि सब लोग हिन्दुस्तान को जीतो वह बड़ा भारी देश है, जीतने पर मैं तुम लोगों को वहाँ पर जागीर देऊँगा ।

ग्रीक सर्दारों ने यह बात न मानी । हिन्दुस्तान के जीतने पर सर्दारों ने उसका अधिकार अपने हाथों में रखने का पक्का विचार कर लिया ।

उसी साल जाड़े के दिनों में सिकन्दर* की मौत हुई । पंजाब के बसनेवालों ने स्वतन्त्रता पाने के लिये बड़े बड़े सर्दारों को मार डाला । सब बसनेवालों का उभाड़नेवाला एक गरीब घर का चन्द्रगुप्त मौर्य था जिसने उधर की छोटी छोटी जातिओं के आदिमियों को मिला कर सब की मदद से सब परदेशियों को निकाल दिया और सब पंजाब को भी अपने आधीन कर लिया ।

पंजाब जीत लेने पर उसने मगध के राजा धननन्द के ऊपर चढ़ाई की और थोड़े ही दिनों में धननन्द को राजसिंहासन से उतार कर आप पटने की राजगद्दी पर बैठ कर राज करने लगा ।

उस समय हिन्दुस्तान में मगध प्रधान राज गिना जाता था । पीछे से यही चन्द्रगुप्त समुद्र के अन्त तक हिन्दुस्तान का राजा हो गया ।

विजयी सेल्यूकस (*Seleucus*) सिकन्दर के मरने के दो वर्ष बाद बाविलोन का सत्रप (*Satrap of Babylon*) बन कर सिकन्दर के राज का आधा हिस्सा दवा कर प्याराडिसोस (*Para-*

* ब्रिटिश म्यूजियम में सिकन्दर के चेहरे की एक पत्थर की मूर्त रखी हुई है ।

deisos) में राज करने लगा।

सेल्यूकस को लोग सीरिया (*Syria*) का राजा भी कहते हैं। सेल्यूकस ने चन्द्रगुप्त के द्वार में मेग्यास्थनीज़ (*Megasthenes*) को अपना राजदूत बना कर भेजा था। उसने चन्द्रगुप्त का प्रभाव देख कर बहुत कुछ अपनी पोथी में लिखा है। बहुत लोग यह भी कहते हैं कि सेल्यूकस ने चन्द्रगुप्त के साथ अपनी बेटी व्याह दी थी।

चौबीस वर्ष हिन्दुस्तान का राज कर चन्द्रगुप्त मरा। उस के बाद उसका पुत्र बिन्दुसार जिसे लोग अमित्रघात भी कहते हैं, पच्चीस वर्ष हिन्दुस्तान का राज कर मरा।

ईशा के २८० वर्ष पहले अठत्तर वर्ष के हो कर सेल्यूकस मरे और इनके मरने के आठ वर्ष बाद बिन्दुसार के बेटे अशोक पटने की राजगद्दी पर विराज कर सब हिन्दुस्तान के राजा हुए। ये बौद्धमत के बड़े पक्षपाती थे। सब देशों में पत्थर के खंभों पर बौद्ध का उपदेश खोदवाकर उसके अनुसार प्रजाओं को चलने के लिये हुक्म दिया था। उन्होंने ३८ वर्ष तक हिन्दुस्तान का राज किया है। इन के देखने से प्रजालोग बहुत प्रसन्न होते थे इसलिये उन्हें लोग 'प्रियदर्शी' कहते थे। बौद्ध के ग्रन्थों में इन की बहुत कथा लिखी है। *Vincent A. Smith*, *M. R. A. S.* ने अशोक (*Asoka*) नाम की, आक्सफोर्ड, क्ल्या-रेंडन प्रेस में (*Oxford, at the Clarendon Press: 1901*) सन् १९०१ ई. में भी एक पोथी अंगरेजी में छपवाई है।

आर्किमिडिज़ (*Archimedes*)।

ईशामसीह के २८७ वर्ष पहले सिराक्यूज (*Syracuse*) में पैदा हुए थे और ७२ वर्ष की उम्र में एक रोमन सिपाही के हाथ से मारे गए। अलेक्ज़ांड्रिया युनिवर्सिटी में कानान (*Conon*) से पढ़े थे। यंत्रविद्या में इन की अद्भुत शक्ति थी। पढ़ने के बाद सिसिली (*Cicily*) में रह कर उम्र बिताई। जब कभी वहाँ के राजा हिरों (*Hiero*)

को किसी बात में कठिनाई आ पड़ती तब इन की सलाह से वह काम किया करता था।

आर्यभट्ट।

पटने के रहनेवाले थे। तेइस वर्ष की उम्र में इन्होंने एक ज्योतिषसिद्धान्तग्रन्थ लिखा है जिसे लोग 'लघुआर्यभटीय सिद्धान्त' कहते हैं। यह ग्रन्थ सन् ४९९ ई. में लिखा गया है। (गणकतरङ्गिणी देखो)।

आर्यभट्ट दूसरे।

इन का बनाया महासिद्धान्त है जिसे मैंने अपनी टीका के साथ बनारस संस्कृत-सौरिज में छपवा दिया है। बालशङ्करदीक्षित के मत से इन का समय ९५३ ई० है (महासिद्धान्त में मेरा विषयानुक्रम देखो) इन्होंने के महासिद्धान्त में गुणन, भजन, वर्ग, वर्गमूल, घन और घनमूल के जांचने के लिये बड़ी सहज विधि लिखी है।

इसी विधि से आजकल की ९ निकालनेवाली विधि निकली है।

आलबर्ट गिरार्ड (*Albert Girard*)।

सन् १५९०-१६३४ ई० में रहे। समीकरणमीमांसा (*Theory of equations*) पर इन का ग्रन्थ है।

आलबर्ट डूरर (*Albert Dürer*)।

सन् १४७१ ई० में न्यूरेंबर्ग (*Nuremburg*) में पैदा हुए, वहीं सन् १५२८ ई० में मरे। कारीगरी में बड़े मशहूर थे। वक्रक्षेत्रों की नई रीति के मूलपुरुष हैं। उन्होंने जो एक तस्वीर में चौत्तीसा लिखा है वह

१६	३	२	१३
५	१०	११	८
९	६	४	१२
४	१५	१४	१

यही है।

एराटोस्थेनेस (*Eratosthenes*) ।

ईशा के २७६ वर्ष पहले अफ्रिका के सिरें (*Cyrene*) स्थान में पैदा हुए । ८२ वर्ष के होकर अलेक्जेंड्रिया में मरे । रेखागणित में बड़े निपुण थे । दृढ़संख्या का ज्ञान सब से पहले इन्हीं को हुआ इसी लिये लोग इन्हें शिव (*Sieve*) कहते हैं ।

औट्रेड (*Oughtred, William*) ।

सन् १५७४ ई. में मार्च की ५ ता: को एटोन (*Elton*) में पैदा हुए और सन् १६६० ई. में आल्बरी (*Albury*) के सरे (*Surrey*) स्थान में जून की ३० ता: को मरे । पाटी और त्रिकोणमिति पर इन के ग्रन्थ हैं ।

कमलाकर ।

महाराष्ट्र ब्राह्मणनृसिंह के बेटे थे । इन के पूर्वज गोदावरी के उत्तर किनारे पर गोल गाँव के रहनेवाले थे । पर इन के पिता बनारस में आकर रहने लगे । उन्हीं के साथ ये भी बनारस में रहते थे । अपने बड़े भाई दिवाकर से पढ़े थे । इन्होंने सन् १६५८ ई. में सिद्धान्ततत्त्वविवेक बनाया है । इन्होंने जिस वर्ष सिद्धान्ततत्त्वविवेक बनाया है उस समय यूरोप में न्यूटन की १६ वर्ष की उम्र थी ।

(गणकतरङ्गिणी देखो)

कुम्भर (*Kummer*) ।

सन् १८१० ई. में पैदा हुए और सन् १८९३ ई. में मरे । बर्लिन युनीवर्सिटी में प्रोफेसर थे । मिश्रित संख्या ($a + k\sqrt{-1}$) और दृढ़-संख्या पर बहुत कुछ लिखे हैं ।

कृष्णदैवज्ञ ।

अहमगीर बादशाह के प्रधान पण्डित थे । इन के पिता का नाम

बल्लाल और माता का नाम गोजी था ।

भास्कर के बीजगणित पर इन की नवाङ्कुरा टीका प्रसिद्ध है । यह टीका सन् १५९० ई. के लग भग बनाई गई है । और बातों के लिये गणकतरङ्गिणी देखो ।

केप्लर (*Kepler, Johann*)

स्टुटगार्ट (*Stuttgart*) के नगीच वुर्टेम्बर्ग (*Wurtemberg*) में सन् १५७१ ई. में डिसेम्बर २७ ता. को पैदा हुए । रेजेन्सबर्ग (*Regensburg*) में सन् १६३० ई. में मरे । सिद्धान्ती थे, टाइको ब्राहे (*Tycho Brahe*) के मददगार थे । लघुरिकथ को व्यवहार में ले आने के लिये इन्हीं ने यत्न किया । सन् १६०४ ई. में ग्रहों के भ्रमण पर तीन सिद्धान्त निकाले जिनके आधार से सिद्धान्तविद्या में बहुत उन्नति हुई । स्त्री के मर जाने से बहुत दुःखी हुए । दूसरी विवाहिता स्त्री भी थोड़े ही दिनों में पगली हो गई । फलित ज्योतिष के बड़े विश्वासी थे । फलित ही के लिये बेधकर ग्रहकक्षाओं के तीन सिद्धान्त निकाले ।

क्यार्डन ।

क्यार्डन का पूरा नाम *Cardan, Jerome (Hieronymus, Girolamo)* है । ये सन् १५०१ ई. सेप्टेम्बर की २४ ता. को पविया (*Pavia*) में पैदा हुए थे और सन् १५७६ ई. सेप्टेम्बर की २१ ता. को रोम (*Rome*) में मरे । बालोन्ना (*Bologna*) और पदुआ (*Padua*) में गणित के अध्यापक थे ।

इन्होंने सन् १५३९ ई. में मिलन (*Milan*) में टार्टाग्लिया (*Tartaglia*) के घर जाकर बड़ी बिनती से कसम खाया कि "मुझे अपने घनसमीकरण की तोड़ने की विधि बता दीजिए, मैं किसी को न बताऊँगा ।" सीख लेने पर अपनी बात को तोड़ कर सन् १५४५ ई.

में अपनी *Ars magna* नाम की पोथी में छपवा दिया। छपवा देने से वह क्यार्डन की विधि कहलाती है (समीकरणमीमांसा देखो)। ये खूनी नहीं तो पूरे क्रोध थे। एक बेर क्रोध से अपने लड़के का कान काट लिया पर पोप ग्रेगरी (*Gregory XIII*) की कृपा से कैद होने से बच गए। ये फलित ज्योतिष के बड़े विश्वासी पण्डित थे। पोप से अपने मरने का समय सन् १५७६ ई. सेप्टेम्बर की २१ ता. बताया था। उस दिन कुछ भी घीमार न थे पर अपनी बात रखने के लिये आत्महत्या कर मर गए। इन्हें दो लड़के थे, दोनों अपने बाप के ऐसे बड़े दुराचारी थे।

क्लैरौट (*Clairaut, Alexis Claude*)

सन् १७१३ ई. में प्यारिस में पैदा हुए और वहीं सन् १७६५ ई. में मरे। वक्रक्षेत्रों के विचार में प्रधानपुरुष थे।

गणेशदैवज्ञ।

ज्योतिष के बड़े पण्डित थे। इन के पिता का नाम केशव और माता का नाम लक्ष्मी था। समुद्र के किनारे दक्षिण में नन्दी गाँव में पैदा हुए थे। तेरह वर्ष की उम्र में प्रसिद्ध करण ग्रन्थ महलाघव को सन् १५२० ई. में बनाया है। भास्कर-लीलावती पर इन की बुद्धिविलासिनी टीका मशहूर है। (गणकतरङ्गिणी देखो)

गर्वर्ट (*Gerbert, Pope Sylvester II*)

सन् १००३ ई. मई की १३ ता. को ये ५० वर्ष की उम्र में मरे हैं। सन् ९७१ ई. में ये रोम (*Rome*) में थे। ये संगीतशास्त्र और ज्योतिष सिद्धान्त में बड़े निपुण थे। पीछे से रीम्स (*Rheims*) में चले गए। इन का बड़ा नाम सुन कर हग क्यापेट (*Hugh Capet*) ने इन्हें अपने लड़के राबर्ट (*Robert*) के पढ़ाने के लिये बुलाया था। यही राबर्ट पीछे से दूसरे ओथो (*Otho II*) के नाम से फ्रान्स

(*France*) के राजा हुए। सन् ९९९ ई. में उन्होंने पोप हो कर ओथो से दूसरे सिल्वेस्टर (*Sylvester II*) की पदवी पाई। सुनते हैं व्याटिकन् (*Vatican*) में अभी तक इनका पुस्तकालय मौजूद है। यह भी सुना जाता है कि इन्होंने एक घड़ी भी बनाई थी जो बहुत दिनों तक म्याग्डबर्ग (*Magdeburg*) में बड़ी हिफाजत से रक्खी थी। इसमें एक पुर्जा (*Organ*) भाफ (*Steam*) से चलता था जो कि गर्वर्ट के मरने के बाद २०० वर्ष तक रीम्स में था। ये बड़े मिलनसार थे। छोटे बड़े सब इन से खुश रहते थे।

गर्हार्ड (*Gerhardt*)

सन् १८९० ई. में इन्होंने हानोवर (*Hanover*) की रायल लाइब्रेरी में लेबनिज़ (*Leibniz*) के लिखे कुछ नोट पाए थे जिन के ऊपर "*Observata Philosophica in itinere Anglicano sub initium Anni 1673*" लिखा है। लेबनिज़ पहले पहल जब लंडन में गया था उस समय के वे नोट हैं।

गेलिब्रान्ड (*Gellibrand, Henry*)

सन् १५९७-१६३७ ई. में थे, ग्रेशम (*Gresham*) कालेज में ज्योतिषसिद्धान्त (*Astronomy*) के प्रोफेसर थे।

गोविन्दाचारी।

बनारस के दारानगर में रहते थे। अपने लड़के के दुराचार से दुःखी होकर पीछे से मिर्जापुर के विन्ध्याचल में जा कर रहने लगे और वहीं सन् १८६७ ई. में मरे। इनके पिता का नाम गोवर्धन था। सरयूपार के भभयामिश्र थे। ज्योतिष और तन्त्रशास्त्र में अपने समय में बड़े प्रसिद्ध पुरुष थे। (गणकतरङ्गिणी देखो)

गौतम-बुद्ध।

बनारस से सौ मील उत्तर की ओर हिमालय की तराई में शाक्य

जातिओं के छोटे राज की राजधानी कपिलवस्तु थी। उस के राजा सिद्धोदन नाम के थे। ये गौतम वंश के थे।

ईशा के ५५७ वर्ष पहले महामाया नाम की रानी से सिद्धोदन को एक बेटा हुआ जिस का नाम माँ बाप ने सिद्धार्थ रक्खा। यही सिद्धार्थ पीछे से योगाभ्यास से सिद्ध हो कर बुद्ध नाम से प्रसिद्ध हुए हैं। गौतम वंश में जन्म लेने से लोग इन्हें गौतमबुद्ध भी कहते हैं।

इन का सिद्धान्त था कि क्या ऊँच जाति क्या नीच जाति सभी को परमात्मा में निश्चल ध्यान लगाने से निर्वाण पद प्राप्त हो सकता है। और मनुष्य का सच्चा धर्म यही है कि सब जीवों पर दया रखे, किसी जीव की किसी समय भी हिंसा न करे 'अहिंसा परमो धर्मः'।

सिद्ध होने पर सब से पहले इन का व्याख्यान बनारस, सारनाथ में जहाँ पहले हरने (हरिण) बहुत रहते थे, हुआ था। अब ये हरने सारनाथ से ६ मील पूर्व और दक्षिण की ओर जाल्हुपुर में रहते हैं। जाल्हुपुर में राजा बनारस की छावनी है। महाराज हरसाल गर्मियों के दिन एक बार शिकार खेलने वहाँ जाते हैं।

बुद्ध अपने मत के फैलाने के लिये आप खुद चारों ओर घूमते थे और चेलों को भी अपने मत के ऊपर व्याख्यान देने के लिये देशविदेश भेजते थे। अस्सी वर्ष की उम्र में जब ये अपने जन्मस्थान से पूर्व की ओर व्याख्यान देने के लिये ८० मील आ गये थे तब अकस्मात् दुःख के बिना निर्वाणपद को प्राप्त हुए। वह स्थान कुशीनगर के पास है। विश्वामित्र कुशवंश के हैं। लोग इन्हें कौशिक भी कहते हैं, संभव है कि कौशिकों की राजधानी ही कुशीनगर के नाम से उस समय प्रसिद्ध रही हो। इस तरह से संभव है कि आज कल के वक्सर और जनकपुर के बीच में कहीं कुशनगर मट्टी में मिला पड़ा हो।

ग्लैशर (Glaisher)

स. १८४८ ई. में पैदा हुए। ट्रिनिटी कॉलेज में गणित के प्रोफेसर थे।

चार्ल्स मार्टेल (Charles Martel)

फ्रांस के राजा पेपिन हेरिस्टेल (Papin Heristal) के बेटे थे। बाप के मरने पर फ्रांक (Frank) का राजा चिल्पेरिक (Chilperic II) दूसरे ने इन्हें इन के स्थान से निकाल दिया था। पीछे से सन् ७३२ ई. के अक्टोबर महीने में इन्होंने अपने बैरियों को जीत कर फिर अपना राज ले लिया। ये सन् ७४१ ई. में मरे।

जगन्नाथ पण्डित।

जयपुर के राजा जयसिंह के प्रधान पण्डित थे। जयसिंह की आज्ञा से अरबी से संस्कृत में रेखागणित और ज्योतिषसिद्धान्त (सम्राट्) बनाया। ये सन् १७२७ ई. में थे। (गणकतरङ्गिणी देखो)

जयराम ज्यौतिषी

बनारस के रहनेवाले महाराष्ट्र ब्राह्मण बबुआ ज्यौतिषी के बेटे थे। बबुआ ज्यौतिषी ही ने अंगरेजों से लड़ने के लिये वजीरअली को मुहूर्त्त दिया था (मेरी गणकतरङ्गिणी देखो)।

जयराम जी ज्यौतिष, व्याकरण, न्याय,..... अनेक विद्याओं में निपुण थे। दुर्गदांकर पाठक जी के समय में मौजूद थे। सन् १७९५ ई. में मरे हैं। कुछ अधिक जानना हो तो गणकतरङ्गिणी देखो।

जान् क्रिश्चियन वन् (Johann Christian Von), Wolf.

सन् १६७९ ई. ब्रेस्ला (Breslau) में पैदा हुए और सन् १७५४ ई. में हाले (Halle) में मरे। हाले और मार्बर्ग (Marburg) में गणित के प्रोफेसर थे। स्कूलों में पढ़ने के लायक पाथियों को बनाया है।

जान् पेल (John Pell)

सन् १६१० मार्च की पहली तारीख को ससेक्स (Sussex) में

पैदा हुए और सन् १६८५ डिसेंबर की १० ता: को लंडन में मरे। रान (*Rahn*) के बीजगणित का अनुवाद किया है।

टार्टाग्लिया (*Nicholas Tortaglia*)

इन का असल नाम निकोलो फान्टाना (*Nicolo Fontana*) था। सन् १५०० ई. में ब्रेस्सिया (*Brescia*) में पैदा हुए और वेनिस (*Venice*) में सन् १५५९ ई. डिसेंबर की १४ ता. को मरे।

सन् १५१२ ई. में जब फरासीसी लोग शहर को लूटने लगे उस समय शहर के लोग भाग कर गिरिजा (*Cathedral*) में छिपे वहाँ पर सिपाहियों के हाथ से सब कतल किए गए। इनके भी तालू और जबड़े किसी की तलवार से कट गए थे। सिपाहियों ने मरा समझ कर छोड़ दिया था पर मैं ने देखा कि लड़का जीता है सो बड़े प्यार से उठा लाई। गरीब होने से बेचारी दवा न कर सकी। कुत्ते से उस घाव को चटाया करती थी। परमात्मा की कृपा से घाव अच्छा हो गया पर तालू कट जाने से ये अच्छी तरह बोल न सकते थे इसी से इन्हें लोग निकोला कहने लगे। मैं ने कुछ लिखने पढ़ने का बन्दोबस्त किया पर ये ऐसे गरीब थे कि लिखने के लिये कागज़ भी न खरीद सकते थे। पीछे से सन् १५३५ ई. के लगभग वेनिस में गणित के प्रोफेसर हुए और थोड़े ही दिनों में बहुत नामी हुए। घनसमीकरण तोड़ने की विधि इन्हीं की निकाली हुई है जिसे लोग क्यार्डन की विधि कहते हैं।

टालेमी (*Ptolemy, Ptolemaeus Claudius*)

सन् ८७ ई. टालेपिस (*Ptolemais*) में पैदा हुए। अलेक्जेंड्रिया में मरे। ग्रीक सिद्धान्तज्ञों में एक प्रसिद्ध पुरुष थे।

डाइओफ्यांटस (*Diophantuss of Alexandria*)

ईशामसीह के पहले २७५ वर्ष के लगभग में पैदा हुए हैं। बीजगणित में बहुत ही निपुण थे। कुट्टक और वर्ग प्रकृति पर बहुत ही वि-

चार किया है। बीजगणित भाग में इन के प्रकार लिखे जायेंगे। ये ८४ वर्ष के हो कर मरे थे।

डिकार्टेस (*Descartes, Rene du Perron*) ।

सन् १५९६ ई. में ला हये टौरैने (*La Haye, Touraine*) में पैदा हुए; सन् १६५० ई. में स्ट्राखोल्म् (*Stockholm*) में मरे। आनालिटिकल जामेट्री की इन्हीं ने निकाला है। बीजगणित में बहुत नई बातें निकाली हैं।

डि मार्गन (*De Morgan, Augustus*) ।

मदरास हाते के मदुरा जिले में, जहाँ मीनाक्षी देवी का बड़ा भारी मन्दिर है सन् १८०६ ई. के जून महीने में पैदा हुए और १८७१ ई. मार्च की १८ ता. को यूरोप में मरे। ये सन् १८२८ ई. में लंडन युनिवर्सिटी में गणित के प्रधान अध्यापक हुए थे। बीजगणित में बड़े निपुण थे। पटियाला के लाला रामचन्द्र के म्याग्जिमा और मिनिमा (*Maxima & Minima*) को इन्हीं ने लंडन में छपवाया था। ये अपने समय में अद्वितीय गणित के पण्डित थे। (लाला रामचन्द्र के लिये मेरा चलनकलन देखो) ।

डिरिक्लेट (*Dirichlet, Peter Gustav Lejeune*) ।

सन् १८०५ ई. में डुरेन (*Duren*) में पैदा हुए और १८५९ ई. में गोर्टिंगेन (*Göttingen*) में मरे। दृढ़संख्या पर बहुत कुछ लिखा है। गोर्टिंगेन में गास् (*Gauss*) के बाद गणित के प्रोफेसर थे।

ताबित बिन कोर्रा (*Tabit ibn Kurra*) ।

सन् ८३३ ई. में मेसोपोटामिया (*Mesopotamia*) के हर्न (*Harran*) में पैदा हुए और सन् ९०२ ई. में बगदाद में मरे।

बड़े सिद्धान्ती और हिसाबी थे। ग्रीकगणित का अरबी में अनुवाद भी किया है। दृढ़संख्या के ऊपर भी बहुत कुछ लिखा है।

तुलसीदास।

बाँदे जिले के राजापुर गाँव के रहनेवाले सरयूपारी ब्राह्मण थे। संवत् १६८० वि. (१६२३ ई.) सावन सुदी सप्तमी को बनारस के ब-सीघाट पर मरे। इन का भाषारामायण घर घर प्रसिद्ध है। इन्होंने प्रधान १२ ग्रन्थ बनाए हैं। (काशी-नागरी-प्रचारिणी सभा के मेम्बरों का छपवाया रामचरित-मानस को, जो इंडियन प्रेस अलाहाबाद में छपा है, देखो)।

थेओडोरस (Theodorus of Cyrene)।

ईशा के ४१० वर्ष पहले रहे। प्लेटो (Plato) के स्कूल में गणित के पण्डित थे। अवर्गांक पर इन का लेख मिलता है।

दीनदयाल बाबा।

पहले ये बनारस के पंचकोसी के देहलोविनायक पर रहते थे पीछे से काशी साक्षीविनायक पर रहने लगे। ये हिंदी भाषा के बहुत ही अच्छे कवि थे। बाबूहरिश्चन्द्र के पिता गोपालचंद, लंकनाथ चौबे, मेरे पिता पण्डित कृपालदत्त, ... सब इन के शिष्य थे। इन के बनाए बहुत ग्रन्थ हैं उन में अनुरागवाग और अन्याक्तिकल्पद्रुम बहुत प्रसिद्ध हैं। सन् १८७० ई. के लगभग बनारस में मरे हैं।

दुर्गाशङ्कर पाठक।

बनारस के रहनेवाले औदित्य ब्राह्मण थे, अपने भाई शिवलाल और लक्ष्मीपति से पढ़े थे। अपने समय में अद्वितीय ज्यौतिषी थे। लाहौर के महाराज खज्जसिंह जी इन्हीं के मुहूर्त्त से राजगद्दी पर बैठे थे। इन्होंने लाहौर के नवविहालसिंह की जन्मपत्री बनाई थी जिसे छ

हजार रुपए पर वकील छक्कालाल के यहाँ इन के भतीजे जटाशङ्कर ने रहने रखी थी। ये सन् १८३७ ई. में मौजूद थे। काशी के हमलों पर सब इन्हीं की शिष्यपरम्परा में हैं। इन के विषय में कुछ अधिक जानना हो तो मेरी गणकूतरङ्गिणी देखो।

नागेश।

इन की माता का नाम सतीदेवी था। शिवभट्ट के पुत्र थे। शृङ्गेर (सिंगरौरा) के राजा की आज्ञा से दीक्षित की सिद्धान्तकौमुदी पर इन की बनाई टीका शब्देन्दुशेखर सर्वत्र प्रसिद्ध है। भट्टोजिदीक्षित के पोते हरिदीक्षित से पढ़ा था।

हरिदीक्षितपादाब्जसेवनावससम्प्रतिः। यह विवरण में लिखा है। इन्होंने बहुत ग्रन्थ बनाए हैं।

नारायण पण्डित।

ये नृसिंह (नरसिंह) पण्डित के पुत्र थे। इन्होंने सन् १३५६ ई. में गणितकौमुदी बनाई है। इस के ग्यारहवें 'भागादान' व्यवहार में दृढ़संख्या की चर्चा है। किसी संख्या का दृढ़संख्याओं के गुण्य गुणक रूप में खण्ड किया है। इस कौमुदी में बहुत नई बातें हैं। इस की एक प्रति क्याम्ब्रिज में और एक प्रति मेरे यहाँ है। गणितकौमुदी के अन्त में नारायण ने लिखा है कि—

गजनगरविमितशाके दुर्मुखवर्षे च बाहुले मासि।

धातुतिथौ कृष्णदले गुरौ समाप्ति गतं गणितम् ॥

इति श्रीसकलकलानिधिश्रीमन्नृसिंहनन्दनगणितविद्याचतुरानमनारायणपण्डितविरचितायां गणितपाठ्यां कौमुद्याख्यायां भद्रगणितं नाम चतुर्दशो व्यवहारः।

गणितकौमुदी के शून्य परिकर्माष्टक में नारायण ने लिखा है "अत्र पाटीगणिते खहरे कृते लोकस्य व्यवहृतौ प्रतीतिर्नास्ति-इत्यत्र ख-

हरो नोकः। असदीये बीजगणिते बीजोपयोगित्वान् तत्र खहरः कथितः” इस से साफ है कि इन का बनाया बीजगणित भी है। इन के बीजगणित की एक खण्डित पुस्तक बनारस संस्कृतकालेज की लाइब्रेरी में है।

निकोमेकस (*Nicomachus of Gerasa, Arabia*)

सन् १०० ई. में मौजूद थे। अंकगणित पर इन का एक ग्रन्थ है।

नेपियर (*Napier, John*)।

सन् १५५० ई. में मर्चिस्टन (*Merchiston*) में पैदा हुए और सन् १६१७ ई. में वहीं मरे। उस समय मर्चिस्टन एडिन्बर्ग (*Edinburgh*) के पास एक साधारण वस्ती थी।

न्यूटन (*Newton, Sir, Isaac*)।

पुरानी गणना से सन् १६४१ डिसेंबर की २५ ता. को वूलसथोर्प (*Woolsthorpe, Lincolnshire*) में पैदा हुए और सन् १७२७ ई. मार्च की २० ता. को केन्सिंगटन (*Kensington*) में मरे। सन् १६६९ ई. में क्यांब्रिज में गणित के प्रोफेसर हुए थे। संसार में सब से बड़े गणित के खण्डित गिने जाते हैं। अधिक जानना हों तो मेरे भाषाबोधक का दूसरा भाग देखो।

परमेश्वर।

आर्यभट्ट के सिद्धान्त पर इन की एक टीका है जिसे हालैंड ने प्रोफेसर कर्णसाहब ने सन् १८७३ ई. छपवा दी है। उस में भास्कराचार्य के बहुत बचन मिलते हैं, इस से साफ है कि ये भास्कराचार्य के बहुत पीछे हुए हैं।

पाणिनि और पतञ्जलि।

पतञ्जलि के विषय में बहुत मतभेद है। प्रोफेसर वेबर साहेब

का मत है कि—“पतञ्जलि ने ‘अरुणद्यवनः साकेतम्’ यह महाभाष्य में लिखा है। यवन से ग्रीक राजा लिया गया है। ब्याक्ट्रिया (*Bactria*) के राजाओं में से फिसी ग्रीक राजा ने साकेत (अयोध्या) को घेर लिया था। इन राजाओं का समय सन् २५ ई. है इस लिये पतञ्जलि का समय सन् २५ ई. से पीछे है।

डा. गोल्डस्टुकर (*Dr. Goldstucker*) के मत से पतञ्जलि का समय ईशामसीह के १५० वर्ष पहले है। बहुतों के मत से पाणिनि का समय ईशा से ८०० वर्ष पहले है और उस से बीस पच्चीस वर्ष बाद पतञ्जलि का समय है। पाणिनि का जन्मस्थान गांधार का शालातुर नगर है और पतञ्जलि का गोनर्द देश (गोन्डा) है।

प्रोफेसर रामकृष्णभण्डारकर ने वेबर वगैरह के मतों का खण्डन किया है। इस विषय में अधिक जानने के लिये ‘*The Indian Antiquary, February, 1873*’ देखना चाहिए।

सभों का मत संग्रह कर के बाबूरजनीकान्त गुप्त ने ‘पाणिनि’ नाम की एक पोथी बंगला भाषा में बहुत अच्छी छपवाई है। काशी, बंगसहित्यसमाज में इस की एक कापी है। पतञ्जलि महाभाष्य में अपने को गोणिका-पुत्र और गोनर्दीय कहते हैं।

महाभाष्य में ‘अरुणद्यवनो माध्यमिकान्’ यह भी एक जगह है। यूरोप के लोगों का अनुमान है कि बौद्ध के स्कूलों का नाम ‘माध्यमिक’ है जो कि नागार्जुन के समय में स्थापित हुए। यवनों ने हिन्दुस्तान पर जब चढ़ाई की उस समय स्कूलों को भी घेरा है इस लिये पतञ्जलि ने बीती हुई बात को भी लिखा है। बहुत लोग ‘माध्यमिक’ से मध्यदेश ‘दिल्ली’ के रहनेवालों को लेते हैं।

महाभाष्य के ‘मौर्य, माध्यमिक, यवन, पुष्पमित्रसभा, पुष्पमित्रं यज्यमः, चन्द्रगुप्तसभा,’ वाक्यों से लोगों ने अनेक अनुमान दिखाए हैं।

वात्स्यायन ने कामसूत्र में लिखा है कि 'गोणिकापुत्रः पारदारिकम्' (गोणिकापुत्र ने परदारिक के ऊपर लिखा है) 'गोनर्दीयो भार्याधिकारिकम्' (गोनर्दीय ने भार्याधिकार के ऊपर लिखा है) इस से 'गोणिकापुत्र' और 'गोनर्दीय' भिन्न भिन्न मातृम होते हैं। काशिका में १, १, ७५ सूत्र की व्याख्या में 'गोनर्द' से पूर्व में एक देश 'ग्राचां देशे' लिया है। कय्यट के मत से कात्यायन और पतञ्जलि दोनों 'पूर्विया' (पूर्व देश के) हैं। महाभाष्य में एक जगह पूर्व का लक्षण लिखा है 'व्यवहितेऽपि' पूर्वशब्दो वर्तन्ते। तथाथा। पूर्व मधुरायाः पाठलिपुत्रम्। जो कुछ हों पर पाणिनि शाकटायन से पीछे हुए हैं क्योंकि उन्होंने अपने व्याकरण में शाकटायन का मत भी लिखा है। जो शाकटायन बौद्ध हों तो बुद्ध से पीछे पाणिनि और पाणिनि से पीछे पतञ्जलि हैं इस में संशय नहीं।

संस्कृत के पण्डितों के बीच में पतञ्जलि के विषय में परम्परा से यह कथा प्रचलित है—

पाणिनि ने अपने व्याकरण 'अष्टाध्यायी' को बना कर अपने समय के पण्डितों को दिखलाया। और पण्डित तो साधारण रीति से देख कर कुछ न बोले पर कात्यायन ने बहुत दोष निकाला जो कि वास्तविक नाम से प्रसिद्ध हैं। इस पर पाणिनि को बहुत दुःख हुआ। लाचार शेष की पूजा करने लगे। एक दिन प्रातःकाल सन्ध्या करने के समय सूर्य को जलाञ्जलि देते समय उसी अञ्जलि से शेषनाग छोटे साँप की मूर्त से जमीन पर गिर पड़े। इसी से उनका नाम पतञ्जलि पड़ा। इन के विषय की श्राव से कोई पास खड़ा न हो सका। तब ये पर्व के भीतर से अष्टाध्यायी की व्याख्या करने को तयार हुए। पाणिनि के अनुयायी लोग प्रातःकाल स्नान सन्ध्या कर वहाँ जाते थे और दो चार ग्रंथ व्याख्यान सुन कर चले आते थे। जिस दिन जितना व्याख्यान होता था वह उसी दिन के नाम से प्रसिद्ध हुआ। जैसे, प्रथमाह्निक, द्वितीयाह्निक, ..., नवाह्निक ...। 'अ अ इति' इस सूत्र के व्याख्यान के समय किसी विद्यार्थी ने रूप देखने के लिये संयोग वश पर्व को उठा दिया। पर्व के उठते ही

पतञ्जलि के तेज से सब व्याख्यान सुननेवाले भस्म हो गए और पतञ्जलि भी अन्तर्धान हो गए। पाणिनि को इस समाचार से बड़ा दुःख हुआ। अपने विद्यार्थियों को लेकर उस स्थान को देखने गए। एक भूत एक पेड़ पर बैठ कर चुप चाप छिप कर पतञ्जलि के व्याख्यान को रोज सुना करता और उस पेड़ के दूध से उसी के पत्ते पर लिखता जाता था।

पाणिनि के जाने पर उस पेड़ के नीचे बहुत लिखे हुए पत्ते मिले। पाणिनि बड़े ध्यान से सब को विनवा कर अपने यहाँ ले गए और उन्हें पाठक्रम से लगा डाले। कुछ पशुओं के खाजाने से या हवा के झुकोर से उड़जाने से न मिले इसलिये जहाँ जहाँ ग्रन्थ खण्डित थे वहाँ वहाँ गुड़िला रेखा (गोल रेखा) का निशान बना दिया।

लोग उसी महाभाष्य को लिखने पढ़ने लगे। "श्रीहर्ष के समय तक खण्डित स्थानों में गोल गोल रेखाओं के चिह्न थे इसी लिये श्रीहर्ष ने लिखा है—'भाष्ये कुण्डलनामिव'।

पीछे से कय्यट ने विवरण करते समय उन रेखाओं के चिह्न निकाल दिए। अब जिन जिन सूत्रों के भाष्य नहीं हैं 'उन्हें' भाष्यकार ने सहज जान कर छोड़ दिया है यह पण्डितों में प्रसिद्ध है। पण्डित लोग ऋषिओं को अमर समझते हैं।

बहुत पण्डितों का मत है कि महाभाष्य पूरा मिला पर जहाँ जहाँ अर्थ न लगे वहाँ वहाँ पर लोगों ने गोल गोल रेखा कर दिया। पीछे से कय्यट ने सब महाभाष्य का विवरण कर उन गोल रेखाओं को मिटा डाला।

श्रीहर्ष ने नैपथ्यचरित के दूसरे सर्ग के ९५ श्लोक में भी कुण्डलना से काटन अर्थ ही लिखा है—

परिखावल्लयच्छालेन या न परेषां ग्रहणस्य गोचरा।

फणिभाषितभाष्यफक्किा विपमा कुण्डलनामवापिता ॥

जी. पिकाक (*Rev. G. Peacock. D. D.*) ।

सन् १७९१ ई. अप्रिल की ९ ता: को डेंटान (*Denton*) में पैदा हुए और सन् १८५८ ई. नोवेंबर की ८ ता: को एली (*Ely*) में मरे । क्यांमिज के ट्रिनिटीकालेज में पढ़े थे, पीछे वहाँ के फेलो भी हो गए थे । सन् १८३७ ई. में एली के अध्यापक और सन् १८३९ ई. में डीन हुए थे । अपने समय में बड़े प्रसिद्ध गणित के पण्डित थे । उस समय की एन्-साइक्लोपीडिया में इन्हीं का गणितसंबंधी लेख छपा था । चलनकलन (*Diffrential Calculus*) पर कुछ उदाहरण और एक बीज-गणित इन्होंने बनाया है ।

पिटिस्कस (*Pitiscus, Bartholomaeus*) ।

सन् १५६१ ई. अगस्त की २४ ता. को पैदा हुए और १६१३ ई. जुलाई की २ ता. को हिडेलबर्ग (*Heidelberg*) में मरे । इन का त्रिकोणमिति पर एक ग्रन्थ है ।

पीटर (*Peter I. The Great*) *Alexeienitch*.

ये रूस (*Russia*) के बादशाह थे, इन का जन्म सन् १६७२ ई. जून की ९ ता. और मरण सन् १७२५ ई. जनवरी की २८ वीं ता. को हुआ ।

पुलिश ।

बराहमिहिर ने पाँच सिद्धान्तों के मतों में इन के पौलिशसिद्धान्त का भी मत लिखा है (पञ्चसिद्धान्तिका देखो) । मेरी समझ में ये आर्यभट के पहले हुए हैं ।

प्यास्कल् (*Pascal, Bloise*) ।

सन् १६२३ ई. में क्लैरमांट (*Clermont*) में पैदा हुए और सन् १६६२ ई. में प्यारिस में मरे ।

दृढसंख्या, संभावना, और रेखागणित पर बहुत विशेष किए हैं । अच्छे हिसाबी थे ।

प्रभाकर ।

लल्ल के शिष्यधीवृद्धि पर भास्कर की एक टीका है उस में लिखा है कि आर्यभट के शिष्य प्रभाकर आदि हैं । इस टीका की एक प्रति बनारस संस्कृतकालेज में है ।

प्लेटो (*Plato*) ।

ईशा के २२९ वर्ष पहले ऐथिन्स (*Athens*) में पैदा हुए और वहीं ८१ वर्ष के होकर मरे । गणित पढ़ाने के लिये स्कूल बनाने के येही आदि पुरुष हैं ।

फरम्याट (*Fermat, Pierre de.*) ।

सन् १६०१ ई. मन्टौवन (*Montauban*) के नगीच बेऔमों-ड-लोमग्ने (*Beaumont-de-Lomagne*) में पैदा हुए और क्यास्ट्रेस (*Castres*) में सन् १६६५ जनवरी की १२ ता. को मरे ।

अपने समय के एक ही गणितज्ञ थे । दृढसंख्याओं के अनेक सिद्धान्त बनाए हैं ।

बर्गी [*Burgi, Joost (Jobst)*] ।

स्विट्ज़रलैंड (*Lichtensteig, St. gall, Switzerland*) में सन् १५५२ ई. में पैदा हुए और सन् १६३२ ई. में क्यासेल (*Cassel*) में मरे । सब से पहले इन्हीं ने एक पक्ष में अव्यक्त और रूपों को और दूसरे पक्ष में शून्य को रख कर समीकरण का रूप लिखा है ।

बर्गी के ल्यूकस (*Lucas di Borgo*) ।

इन्होंने लोग ल्यूकस प्यासिओली (*Pacioli*) भी कहते हैं ।

किसी ने इन्हें ल्यूकस पासिओलस (*Paciolus*) भी कहा है।

ये सन् १४५० ई. के लगभग टस्कनी (*Tuscany*) के वर्गों स्थान में पैदा हुए। सेम, पिसा, वेनिस और मिलन में घूम घूम कर गणित पर व्याख्यान देते थे।

मिलन में गणित के अध्यापक भी हुए थे। फ्लोरेन्स (*Florence*) में सन् १५१० ई. के लगभग मरे हैं। इन के विषय में बहुत बातें नहीं जानी गई हैं। इनका प्रधान गणितग्रंथ *Summa de Arithmetica, Geometria Proporzioni e properzionalita* सन् १४९४ ई. में वेनिस (*Venice*) में छपा था। इस में दो भाग हैं एक में अंकगणित और बीजगणित दूसरे में रेखागणित है। सब से पहले यह गणित की पुस्तक छपी है। पिसा के लेनार्डो (*Leonardo of Pisa*) के ग्रंथ में इन की बहुत बातें पाई जाती हैं।

बापूदेवशास्त्री।

इन के पिता का नाम सीतारामदेव और माता का नाम सत्यभामा था। इन का जन्म सन् १८२१ ई. नोवेंबर की पहली ता. को पूना में हुआ है और मरण सन् १८९० ई० में बनारस में हुआ। ये नागपुर में दुर्गिराज कान्यकुब्ज से और पीछे से सेवारामजी से पढ़े थे। ये चित-पावन महाराष्ट्र थे (गणकतरङ्गिणी देखो)।

बाचेट (*Bachel-de-meziriac*)

सन् १५८१ ई. में बर्ग-एन्-ब्रेसी (*Bourg-en-Bresse*) में पैदा हुए और सन् १६३८ ई. में मरे।

ये अपने गणित ग्रंथ *Problemes plaisants,...* से बहुत प्रसिद्ध हैं।

बारो (*Barrow, Isaac*)।

सन् १६३० ई. में लंडन में पैदा हुए, सन् १६७७ ई. मई मास की

४ ता. को क्यांब्रिज में मरे। क्यांब्रिज में ग्रीक और गणित के प्रोफेसर बड़े भारी थे। गणितज्ञ और व्याख्यान देनेवाले थे। न्यूटन इन्हीं के विद्यार्थी थे। इन के पीछे इन की जगह न्यूटन को मिली थी।

ब्रह्मगुप्त।

चापवंशी व्याघ्रमुख राजा के यहाँ रहते थे। इन के पिता का नाम जिष्णुगुप्त था। सन् ५९८ ई. में पैदा हुए थे। सन् ६२८ ई. में ब्राह्म-स्फुटसिद्धान्त और सन् ६६५ ई. में 'खण्डखाद्य' को बनाया है। इन्हीं के ग्रंथ की छाया से भास्कराचार्य ने अपनी सिद्धान्तशिरोमणि बनाई है। (गणकतरङ्गिणी देखो)।

ब्रिग्स (*Briggs, Henry*)।

सन् १५६० ई. या सन् १५६१ ई. फेब्रुअरी में ह्यालिफाक्स, यार्क-शायर (*Halifax, Yorkshire*) के नगीच वालों वूड (*Warley Wood*) में पैदा हुए और स. १६३० या स. १६३१ ई. जनवरी २६ ता. को आक्सफोर्ड में मरे। इन्हीं ने दश आधार में लघुरिक्त का प्रचार किया।

ब्रौंकर (*Brouncker, William, Lord*)।

ये सन् १६२० ई. में पैदा हुए और सन् १६८४ अप्रिल की ५ ता. को वेस्टमिन्स्टर (*Westminster*) में मरे। लंडन की रायल सोसाइटी के बनाने में ये भी एक प्रधान पुरुष थे।

भट्ट बलभद्र।

आलवेरुती ने अपने ग्रंथ में इन की बहुत चर्चा की है। भट्टोत्पल ने भी घृह्यसंहिता की टीका में कई जगह इन के वचन लिखे हैं। इस से जान पड़ता है कि ये भट्टोत्पल से पुराने हैं।

भट्टोजिदीक्षित ।

भानुदीक्षित को देखो ।

भट्टोत्पल ।

इन्होंने बृहत्संहिता की टीका के मंगलाचरण में 'द्विजवरणीकां करोत्युत्पलः' इस से अपना नाम 'उत्पल' लिखा है तो भी लोग आदर से इन्हें 'भट्टोत्पल' कहते हैं । पञ्चसिद्धान्तिका को छोड़ कर बाकी वराह-मिहिर के सब ग्रन्थों पर इनकी टीका मिलती है । बृहज्जातकटीका के अन्त में लिखा है कि मैंने शाके ८८८ याने सन् ९६६ ई. में इस टीका को बनाया है । इस लिये ये सन् ९६६ ई. में थे । (गणकतरङ्गिणी देखो) ।

भानुदीक्षित ।

(व्याकरण) सिद्धान्तकौमुदी बनानेवाले भट्टोजिदीक्षित के पुत्र थे । महीश्वर देश के राजा बघेलवंशी श्रीकीर्तिसिंहदेव के कहने से इन्होंने अमरकोश की टीका 'व्याख्यासुधा' छपवाई । ये पीछे से सकयासी हो गए थे, उस समय इन का नाम 'रामाश्रम' रक्खा गया है । बनारस कालेजियेट स्कूल के संस्कृत के पण्डित श्रीगणेशदत्त त्रिपाठी के घर संवत् १७३८ (स. १६८१ ई.) की लिखी एक सिद्धान्तकौमुदी की पुस्तक है इस से जान पड़ता है कि भट्टोजिदीक्षित जहाँगीर बादशाह के समय में थे । भानुदीक्षित के पुत्र हरिदीक्षित थे । इन्होंने विद्यार्थी नागेश हैं जिन्होंने लघुशब्देन्दुशेखर बनाया है । बहुत लोग कहते हैं कि भट्टोजिदीक्षित का जन्म १५०० शाका अर्थात् सन् १५७८ ई. में हुआ । इन का घर बंगाली टोला, बनारस में था ।

भास्कर (भास्कराचार्य) ।

दक्षिण कर्णाटक देश में सह्यपहाड़ की तराई में बीजापुर गाँव

में स. १११४ ई. में पैदा हुए । इन के पिता का नाम महेश्वर था । अपने पिता ही से पढ़े थे । ३६ वर्ष की उम्र में सिद्धान्तशिरोमणि बनाई है । अपने समय के अद्वितीय गणितज्ञ थे । स. ११८३ ई. में करणकुतूहल बनाया है । इस से साफ है कि ६९ वर्ष से अधिक उम्र में मरे हैं । और बात जाननी हो तो मेरी गणकतरङ्गिणी देखो ।

महम्मद ।

स. ५७१ ई. की अप्रिल की २० ताः सोमवार को मक्के में पैदा हुए । अब्राहम के बेटे इस्मायल से इन्होंने धर्मोपदेश पाया था । इन्होंने बनाया कोरान है । इन के पिता का नाम अब्दुल्लाह था जो इन की दो वर्ष की उम्र में मर गए और इन की माँ का नाम अमीना था जो इन की छ वर्ष की उम्र में मर गई थी । माँ बाप के मर जाने पर इन के दादा अब्दुल मुत्तलिब ने इन्हें दो वर्ष तक पाला था पर वे भी अपने बेटे अबूलतलिब को सौंप कर मर गए । अपने चाचा के साथ ये २५ वर्ष की उम्र तक थे । पीछे से एक मक्के के महाजन की विधवा स्त्री के यहाँ ऊँट हाँकने की नोकरी कर ली थी जो कि इन्हें कुछ दिन के लिए सीरिया में भेज दिया था । पीछे से इसी स्त्री ने इन के संग अपना ब्याह कर लिया । चालीस वर्ष की उम्र में इन्होंने अपने मत का प्रचार किया । मक्के से भाग कर जब मदाने में आए वहाँ इन के मत का लोगों पर बड़ा प्रभाव पड़ा । सन् ६२२ ई. में इन का शाका चला जिसे हिज्र या हिज्रा कहते हैं । हिज्र के ग्यारहवें वर्ष, स. ६३२ ई. की ८वीं जून सोमवार को मरे । तेरह दिन तक बीमार थे । मरने के समय इन की उम्र ६३ चान्द्रवर्ष की थी । जहाँ मरे उसी जगह गाड़े गए । इन्होंने पन्द्रह स्त्रियों के साथ ब्याह किया था ।

मोस्कोपलस (*Moschopolus, Manuel*) ।

इन का वृत्तान्त मूलग्रन्थ ही में लिखा है ।

महीधर ।

वेद का भाष्य (वेददीप) बनाया है ।

माधवाचार्य ।

ये मायण के पुत्र हैं । इन्हीं के छोटे भाई सायण हैं जिन्होंने वेद पर वेदार्थप्रकाश भाष्य बनाया है । माधवाचार्य ने अपने सर्वदर्शन में लिखा है —

“श्रीमत्सायणदुग्धाब्धिकौस्तुभेन महौजसाः ।

सर्वं वेन्नेष वेदानां व्याख्यातृत्वे नियुज्यताम् ॥”

इस से स्पष्ट है कि इनके छोटे भाई सायण ही ने वेदभाष्य बनाया है । माधवाचार्य ईजानगर (विजयनगर) के राजा बीरबुक्क के प्रधान मन्त्री थे । इन्हीं के कहने से सायण ने व्याकरण-माधवीयधातुवृत्ति बनाई है ।

सन् १८९६ ई. में बनारस संस्कृत कालेज के प्रधान व्याकरणाध्यापक महामहोपाध्याय दामोदरशास्त्री जी ने पण्डितपत्र में इस माधवीयधातुवृत्ति को शुद्ध कर छपवा दिया है । राजा बीरबुक्क के दानपत्र से स्पष्ट है कि ये सन् १३९१ ई. में मौजूद थे ।

मुनीश्वर ।

पयोष्णी नदी के किनारे एलच देश के दधि गावों में इनके पूर्वज रहते थे । पीछे से इनके दादा त्रिमल्ल बनारस में चले आए । इनके पिता का नाम रङ्गनाथ था । ये बनारस में सन् १६०३ ई. में पैदा हुए । इनकी भास्करलीलावती पर निस्प्रार्थ दूती टीका और सिद्धान्तशिरोमणि पर मरीचि टीका बहुत प्रसिद्ध है । मरीचि का पूर्वार्ध सन् १६३५ ई. में और उत्तरार्ध सन् १६३८ ई. में बना है । इन्होंने सिद्धान्तसार्वभौम को सन् १६४६ ई. में बनाया है । और बातों के लिए गणकतरङ्गिणी देखो ।

याम्बलिकस (*Iamblichus*) *From Chalcis*.

सन् ३२५ ई. के लगभग थे । सभी गणितों के ऊपर लेख है ।

युक्लेद (*Euclid*) ।

ईशा के पहले ३०० वर्ष टालोमी सोटर (*Ptolemy of Soter*) के राज में अलेक्जेंड्रिया में थे । रेखागणित के १३ अध्यायों का संग्रह किए थे ।

यूलर (*Euler, Leonhard*) ।

सन् १७०७ ई. में ब्यासेल (*Basel*) में पैदा हुए और सन् १७८३ ई. में पेटर्सबर्ग (*Petersburg*) में मरे । अपने समय में अद्वितीय सिद्धान्त और गणित के पण्डित थे ।

रडोल्फ (*Rudolf, Christoff*) ।

सन् १५२५ ई. के लगभग में पैदा हुए हैं । जर्मनी के एक बीजगणितज्ञ थे ।

राबर्ट रिकार्डे (*Robert, Recorde*) ।

सन् १५१० ई. में टेन्बी वेल्स (*Tenby, Wales*) में पैदा हुए और सन् १५५८ ई. में लंडन के जेलखाने में मरे । आक्सफोर्ड में गणित के प्रोफेसर थे ।

रामेसेस (*Rameses. III*) ।

एजिप्ट में सूर्यवंशी को रामेसेस कहते हैं । तीसरे रामेसेस को हीरादत्त (*Herodotus*) रामप्सिनितस् (*Rhampsinitus*) कहते हैं ।

ईशामसीह के १२०० वर्ष पहले इन्होंने लगभग २५ वर्ष तक एजिप्ट में राज किया था । सन् १८८६ में इनकी लास (*Mummy*)

पाई गई है।

इन का बहुत समय लड़ाई ही में बीता।

रेगिओमान्टनस (*Regiomontanus*)

(*Johannes Muller*) ।

स. १४३६ ई. जून की ६ ता. को कोनिग्सबर्ग (*königsberg*) में पैदा हुए और स. १४७६ ई. जुलाई की ६ वीं ता. को रोम (*Rome*) में मरे। गणित और सिद्धान्त में बड़े निपुण थे। बहुत ग्रीक ग्रन्थों का अनुवाद किया है। सब से पहले इन्हीं की बनाई त्रिकोण-मिति स्कूलों में पढ़ने के लिये नियत की गई है।

लल्ल ।

परमेश्वर, आर्यभटीय के भट्टदीपिका-टीकाकार, के मत से पहले आर्यभट्ट के शिष्य थे। इन के पिता का नाम भट्टत्रिविक्रम और पितामह (दादा) का नाम शाम्भू था। इन्हीं का बनाया 'शिष्यवीवृद्धि' है। भास्कराचार्य ने अपनी सिद्धान्तशिरोमणि में इसी ग्रन्थ का बहुत खण्डन किया है। (गणकतरङ्गिणी देखो) ।

ल्याग्रेंज (*Lagrange, Joseph Louis, Comte*) ।

स. १७३६ जनवरी की २५ ता. को टूरिन (*Turin*) में पैदा हुए और स. १८१३ एप्रिल की १० ता. को प्यारिस (*Paris*) में मरे। अपने समय में अद्वितीय गणित के पण्डित थे। गणित में बहुत नई बातों का पता लगाया है जिन के आधार से गणितविद्या की बहुत वृद्धि हो रही है। ये ज्यौतिषसिद्धान्त में भी बड़े निपुण थे।

बटेश्वर ।

इन का बनाया एक ज्यौतिषसिद्धान्त है, उस में ब्रह्मगुप्त के बहुत बातों का खण्डन है उसी सिद्धान्त में लिखा है कि ब्रह्मा की आयु में

केवल अभी साढ़े आठ वर्ष बीते हैं (कजन्मनाऽष्टौ सदलाः समा ययुः) । ये ब्रह्मगुप्त के बाद हुए हैं ।

बराहमिहिर ।

आदित्यदास के बेटे थे। भट्टोत्पल के मत से मगध के रहनेवाले थे। विक्रमराजा के यहाँ आश्रित होने से पोछे से उज्जयिनी ही में रहने लगे। स. ५०५ ई. में 'पञ्चसिद्धान्तिका' को बनाया है। इन के बनाए बृहत्संहिता, बृहज्जातक, लघुसंहिता, लघुजातक, योगयात्रा ग्रन्थ प्रसिद्ध हैं। (गणकतरङ्गिणी देखो)

वालिस (*Wallis, John*) ।

स. १६१६ ई. में आक्सफोर्ड में पैदा हुए और स. १७०३ ई. में आक्सफोर्ड में मरे।

आक्सफोर्ड में रेखागणित के प्रोफेसर थे, बहुत गणित की पुस्तकें प्रकाश की हैं।

विडम्यान (*Widmann, Johann, Von Eger*) ।

सन् १४८९ ई. में थे। लेप्ज़िग (*Leipzig*) में बीजगणित पर व्याख्यान देते थे। सब से पहले जर्मनभाषा में इन्हीं ने बीजगणित बनाया है। रेखागणित और पाटीगणित पर भी इन के ग्रन्थ हैं।

वैटा (*Vieta*) ।

इन का पूरा नाम (*Vieta, Francois, Seigneur de la Bigotiere*) है। सन् १५४० ई. में फान्टेने-लि-काम्पे (*Fontenay-le-Comte*) में पैदा हुए और सन् १६०३ ई. में प्यारिस में मरे। अपने समय में बीजगणित में सब से प्रधान थे। त्रिकोणमिति और रेखागणित पर भी इन के ग्रन्थ हैं।

वैष्णवदास बाबा ।

दिल्ली के रहनेवाले माड़वारी वैश्य थे। सं. १८९० याने सन १८३३ ई. में घर छोड़ कर बनारस चले आए और पण्डित श्रीभैरवमिश्रजी से जिन्होंने शब्देन्दुशेखर पर भैरवी टीका बनाई है, व्याकरण, वेदान्त, न्याय, मीमांसा, ... अच्छी तरह से पढ़ कर वेदान्ती साधु हो कर, बनारस चौकाघाट के पास वेदान्ती तुलसीदास के अखाड़े में रहने लगे। इन के पढ़ाए सैकड़ों विद्यार्थी अच्छे अच्छे पण्डित हुए। सं. १९३६, सन १८७९ ई. जेठ सुदी दशमी को मरे। मरने के समय इन की अवस्था अस्सी वर्ष की जान पड़ती थी। मरने के एक दिन पहले मैं अपने पिता (पं. कृपालदत्त) के साथ इन से मिलने गया था। कुछ बीमार न थे, पर मेरे पिता से कहा कि आज रात मैं अपनी देह त्याग करूँगा, इस पर मैंने कहा कि 'अभी आप दश बरस जीएँगे।' मेरी बात सुन कर उन्होंने मुझे डाँटा कि तू अभी लड़का है इस बात को नहीं जान सकता। हम लोगों के घर आने पर उसी दिन दश बजे रात मरे। मैं इन से कुछ योगक्रिया भी सीखता था।

शंकर बालकृष्णदीक्षित ।

इन्होंने मरहटीभाषा में भारतीयज्योतिःशास्त्र (*History of Indian Astronomy*) सन १८९६ ई. में लिखा है। पूने में ये बड़े प्रसिद्ध पुरुष हो गए। इन्होंने ने बहुत कुछ लिखा है।

राजा शिवप्रसाद सितारेहिंद ।

इन का जन्म संवत् १८८० (स. १८१३) माघ-सुदि २ को हुआ और मरण स. १८९५ ई. मई की २३ ता. को बनारस में हुआ। ये जैनी गोखरु वंश में हैं। हिंदी प्रचार करने में इन्हें आदिपुरुष कहना चाहिए। इन के दादा का नाम राजा अलचंद और पिता का नाम गोविंदचंद था। पं. मथुरानाथ मालवीय (जो कि बनारस संस्कृत कालेज

के पुस्तकालयाध्यक्ष थे) के कहने से इन की माता संतान होने के लिये नित्य शिव (महादेव) की पूजा करती थी। इसी लिये बालक होने पर शिवप्रसाद नाम रक्खा गया। इन्होंने हिंदी की उन्नति के लिये बहुत पोथियाँ बनाई हैं। और बातों के लिये हिंदी-कोविद-रत्नमाला देखो।

श्रीधर ।

बहुत से लोग इन्हें भट्ट श्रीधर कहते हैं। इन्होंने पाटी, बीज, वर्षपद्धति, त्रिशतिका (पाटीसार) इत्यादि ग्रन्थ बनाए हैं पर सब नहीं मिलते हैं। त्रिशतिका को मैंने उपपत्ति के साथ चन्द्रप्रभा प्रेस में छपवा दिया है। मेरे मत से इन का समय सन १९१ ई. है। (गण-कतरङ्गिणी देखो)।

श्रीपति ।

बहुत लोग इन्हें श्रीपतिभट्ट भी कहते हैं। इन के बनाए पाटी, बीज, सिद्धान्तशेखर ग्रन्थ नहीं मिलते। जातक में श्रीपतिपद्धति और मुहूर्त में रत्नावली, रत्नसार और रत्नमाला ये ग्रन्थ मिलते हैं। एक इन का बनाया धीकोटि नाम का करणग्रन्थ भी मिलता है जो कि सन १०३९ ई. में बनाया गया है। इस से जान पड़ता है कि ये सन १०३९ ई. में थे। (गणकतरङ्गिणी देखो)।

श्रीहर्ष ।

जैन राजशेखर के प्रबन्धकोश में जो कि सन १३४८ ई. में बना है लिखा है कि हीर के पुत्र श्रीहर्ष बनारस में पैदा हुए। बनारस के राजा गोविन्दचन्द्र के पुत्र जयन्तचन्द्र की आज्ञा से इन्होंने 'नैषध-चरित' बनाया। श्रीहर्ष की माता का नाम 'मामलदेवी' था जो कि नैषध-चरित के प्रतिसर्ग के अन्त के श्लोक से साफ है।

बनारस संस्कृतकालेज के प्रधान अध्यापक स्वर्गवासी पण्डित शी-तलाप्रसादजी के पास एक पुरानी श्रीहर्ष की वंशावली थी उस में लिखा

था कि—कनौजिअ हौरामिसिर के हरखूमिसिर जो कि कनौज के राजा के प्रधान पण्डित थे। इस से जान पड़ता है कि हौरामिसिर ही संस्कृत में हौरमिश्र और हरखू श्रीहर्ष कहे गए हैं।

बनारस में जयन्तचन्द्र सन् ११६८-११९४ ई. में राज करते थे इस लिये वही श्रीहर्ष का भी समय है।

जिसे अधिक जानने की इच्छा हो वह डा. बूलर (Dr. Georg Bühler) का (*A not on the History of the Sanskrit Literature*) जो कि सन् १८७१ ई. नोवेंबर की २वीं ता: को *Bombay B. R. Asiatic Society* में पढ़ा गया और सन् १८५७ में छपा गया, देखो।

भास्कराचार्य का जन्म सन् १११४ ई. में है। इन्होंने सन् ११८३ ई. में करणकुतूहल बनाया है। इस से स्पष्ट है कि भास्कर और श्रीहर्ष एक ही समय के हैं।

श्रीहर्ष के विषय में लाहोर के ओरियंटल कालेज के प्रधान पण्डित महामहोपाध्याय श्रीशिवदत्तजी मुद्रितनारायण टीका सहित तैपथीय अरित की भूमिका में बहुत कुछ लिखा है।

सिकन्दर-बडे।

ये ईशा के ३६० वर्ष पहले पैदा हुए थे।

महम्मद कोरान में सिकन्दर को जुलकन (दो सींगवाला) कहते हैं। मलिक महम्मद भी पदमावत में इन्हें जुल कर्न लिखते हैं। इन के सिके में भी भेंड़े की दो सींग बनी है। ईशा के ३३१ वर्ष पहले इन्होंने पर्शिया के राजा दारा को जीता था। ईशा के ३२७ वर्ष पहले हिन्दुस्तान पर चढ़ाई की थी। वे रोक टोक वे सिन्धु नदी के पार उतर आए थे पर पार होने पर पीछे से पंजाब के राजा से आगे बढ़ने के लिये रांके गए। ग्रीक लोगों ने पंजाब के राजा का नाम पोरस (Poros) लिखा है। ये ३३ वर्ष की उम्र में मरे हैं।

स्टिफेल (Stifel, Michael)।

सन् १४८६ या सन् १४८७ ई. में एस्लिंगन (Esslingen) में पैदा हुए और सन् १५६७ ई. में जेना (Jena) में मरे। अपनी गणित की पुस्तक से जो सन् १५४४ ई. में प्रकाशित हुई और जिस का नाम *Arithmetica integra* है बहुत प्रसिद्ध हुए।

स्टेविन (Stevin, Simon)।

स. १५४८ ई. में ब्रुज (Bruges) में पैदा हुए और स. १६२० ई. में लिडेन (Leyden) या हगे (Hague) में मरे। पाटीगणित के अच्छे पण्डित थे।

हाइप्सिक्लेस (Hypsicles of Alexandria)

ईशामसीह के १९० वर्ष पहले हुए हैं। घनक्षेत्रमिति और दृढ़-संख्या के सिद्धान्त पर कुछ लिखा है। कुछ के कई प्रश्नों के उत्तर भी निकाले हैं।

हारिओट (Harriot, Thomas)

स. १५६० ई. में आक्सफोर्ड में पैदा हुए। इसलेवर्थ (Is-Leworth) के नगीच सियोन हास (Sion House) में स. १६२१ जुलाई की २ ता: को मरे।

अपने समय में अंगरेजी बीजगणितज्ञों में बहुत ही प्रसिद्ध बीजगणित के पण्डित थे।

हीरादत्त (Herodotus)।

ईशामसीह के ४८४ वर्ष पहले क्यारिया (Caria) के ह्यालि-क्यारनसस (Halicarnassus) स्थान में उत्पन्न हुए थे। ग्रीक देश में इतिहास के मूलपुरुष मने जाते हैं। इन्होंने अपने इतिहास

को नवखण्डों में लिखा है। इन के ग्रन्थ का अंगरेजी में सन्ध से अच्छा अनुवाद स. १८९० ई. में *G. C. Macaulay* ने किया है। जैसे हिंदुस्तान में महाभारत बनानेवाले व्यासजी की प्रसिद्धि है उसी तरह ग्रीकदेश में इन की प्रसिद्धि है। बहुतों का यह कहना है कि ये हीरादत्त व्यासजी के विद्यार्थी थे; देश विदेश घूमते ग्रीकदेश में पहुँच गए थे। इस का कहीं पता नहीं लगता। यह बात असंभव जान पड़ती है क्योंकि व्यास और हीरादत्त के समय में हजारों वर्ष का अन्तर है।

ह्यांकल (*Hankel, Hermann*) ।

स. १८३९ फेब्रुअरी की १४ ता. को हाले (*Halle*) में पैदा हुए और स. १८७३, अगस्त की २९ ता. को स्कारम्बर्ग (*Schramberg*) में मरे। मिश्रितसंख्या और गणित के इतिहास के ऊपर इन्होंने ग्रन्थ लिखे हैं।

ह्यूगेन (*Huygens, Christiaan, von Zuylichem*) ।

स. १६२९ ई. में हगे (*Hague*) में पैदा हुए और वहीँ स. १६९५ ई. में मरे।

बड़े प्रसिद्ध सिद्धान्ती थे। वक्रक्षेत्रों पर भी बहुत कुछ लिखा है।

शब्दानुक्रमणिका ।

अंक १, २, ११, १४, १६, १७, २१, २२, २३, ३७, ४२, ४५, ५२, ६१, ६२, ६८	अंश ७७, ८७, ८९ अकरणोगत १११ अक्षय १३ अक्षर ४, ९, ११, २७, ३१, ३७, ४२ अक्षरारम्भ ३० अक्षौहिणी २ अखाड़ा १० अंकगणित ४९, ७१, ७६, ७७, ७९, ८४, ८५, ८६, ८८, ९१, ९३, ९७, १०३, १०४	अपवर्त्तन ७७ अबराहिम मलफ- जारी ४९ अबीर ४१, ४२ अबुलमासर ४५ अब्ज ५५ अम्बासिद्दी ४४ अमरकोश ६, ४०, ४८, ५३, ५४, ५६, ५८ अमावास्या १३ अयुत ५३, ५४, अरब २२, २८, ४१, ४२, ४४, ४५, ५८, ६५, ६७, ७९, ८७, ११७, ११९, १२७ अरबिक नोटेशन ४१ अरबी २१, २२, २५, २८, ४०, ४३, ४५, १०४ अरस्तू ४ अरिष्टोटल ४, १०५ अर्ब ५८ अर्बुद ५५, ५८
अंकगणितों ८७ अंकपाश १३० अंकप्रकरण ९ अंकविद्या ४१ अंकों ५९, ६०, ६१, ७० अंगद २९ अंगरेजी १८, २१, ६८, ७४ अंगरेजीराज २८ अंगरेजीस्लेट ४२ अंगुलिओं २६, ४० अंडा १६ अंतर ६३ अंत्य ५७ अंधेरी ९२	अगस्त्य ४० अच्छेद्य १०४ अजट्टक २७ अटक १७ अद्वैया ६८, ६९ अथर्वसंहिता ४६ अध्यर्थ प्र, द्वि, तृ, च, प, ६९ अध्याय ७३ अनन्त १०३ अनाक्सिम्यांडर १२२ अनार ११८ अनुपात १०१ अनुवाक ४६ अपभ्रंश ३१	

अर्वन्	५८	आफ्रिका	४३	इष्टकर्म ९३, १२४, १२६
अर्वा	५८	आरम्भ	६३	इष्टकाल १२
अलकरीह	११७	आर्कमेडिज	८५	इसेनलोहूर ९१
अलकलमदी	६७	आर्च	८९	उमसेन ४१
अलनसवी	८७	आर्य	२०	उत्क्रम ५९
अलमनसूर	४४, ४५	आर्यभट १७, ३८, ४८,		उत्क्रमकिया ६१
अलहुसेन	८०, ८१	७३, ७९, ८२, ८८,		उत्क्रमरीति ६०, ६२,
अवासिडेश	४४	१०३, ११५, ११६,		६३
अशोक ४, २९, ३१, ८६		११७, १२३		उदात्त ६
अष्ट	८	आर्यभट दूसरे २४,		उदाहरण ६०, ६४, ६६
अष्टगन्ध	११८	३५, ३७, ५९, ८०, ८१		८८
अष्टाध्यायी	२	आर्यभटीय ३७, १२,		ऋग्वेद १३, ४७
असंभव	५८	७३, १०३, ११५		ऋण २४, ९८
असंभवसंख्या १३१		आर्या ४८		ऋषि ३८
अहमेस ९१, ९२, ९३,		आलबर्टगिरार्ड ६९		एक ७, ६१, ६४
९८		आलबर्ट डूरर ११९		एकट्ठा ५९
आँख ९		आल बेरुनी ४२		एक, दो...भेद १२९
आकाश ४०		आसन्नमूल ८६		एकला ६८
आकाशकक्षा ५१		इंगल्यांड ६५		एकवर्णसमीकरण ९३
आगरे ९५		इंडिया १९		एकई ६१
आचार्य ८५, ९२		इटली ५०, ६५, ७७,		एजिप्ट १४, १६, २२,
आट्टिलियन ५१		१२०, १२२		५७, ५८, ६५,
आडिपनवल्याक १३७		इतिदिक् ९२		९१, ९२, ९४
आदमी १६		इथम् १९		एडवर्ड राइट ९५
आधीरात ११८		इनामी सवाल ११०		एराटोस्थेनस १०५
आनन्दवन ४०		ईशामसीह १२, १४, ९१		एशियाटिक सो-
आफिर १९		इष्ट ७७, ७८		साइटी १७

ओथो ७८	करणी ९८	कील ५५
ओप्राव्यारिआ ११०	करोड़ १६, ५४	कीली ५९
औट्टेड ९६, १०१	कर्ण ७०	कुल ५५
कंकड़ ६४	कर्णरेखाओं ७०	कुंजविहारीलाल
कंकड़िओं ६४	कल ५०, ६३	पंडित ९५
कच्छप ५	कलम ६, ९, ११८	कुट्टक ४४, १३०
कटक १७	कला १३	कुट्टकप्रकरण १०४
कटाहजातक ४२	कल्प २	कुट्टकव्यवहार १०४
कठिन ९१	कसेरु ५२	कुट्टकाध्याय १०४
कन्न २९	कस्तूरी १९	कुट्टाकार ८८, १०३
कपाट ७१	कागज ६, ९, ३८, ४२,	कुंद ५
कपाटसंधि ७१, ७२,	७२	कुवेर ५, ५०, ५२
७३, ७८	काठ ४२, ५८, ६४	कुम्भर १११
कपाल २०	कांड ४६	कुत्या २१
कपूर १०	कात्यायन ९	कुष्ण ३८
कमर्शियम् एपि-	कान २९	कुष्णदैवज्ञ ३९
स्टोलिकम् ११०	कान्स्टांतिनोपेल् १२३	कैप्लर २१, ९७
कमल ४८, ५५, ५८	कामा ९६	केवाड़े ७१
कमलगट्टा ५८	काडोंवा ४३	कौलास ५२
कमलाकर ८६, ८८	कालपाद १२	कौलासपुरी ४०
कमलाक्ष ५६	काला पटरा ४२	कोकिल १८
कमलों ५६	काली पटरी ४२	कोटि ५४, ५५, ६९,
कम्बोज २०	काली संख्या १३६	७०, ७९
करखी ९	काव्य २, २४, ७५	कोटिज्या ९५, १३७
करणयन्त्रों ९०	काशी ४०, ४१	कोटिवर्षा ५४, ५५
करणप्रकाश १०८,	काश्मीरी ९	कोटिरूपरीखा १३७
१०९	किरातार्जुनीय ७५	कोठरी ९२

कोरो	२६	खड़ी पंती	६६	गणिताध्याय	३९
कोष्ट	१९	खंडगुणन	७४	गणेश	३७, ४०, ६९, १०४
कोष्ठ	१०८	खंडमेरु	१२९	गदहा	२८
कौडिआ	५४	खंभा	१६	गर्वट	७८
कौड़ी	५४, ५८	खंभों	३१	गलत	७८
क्यांटर	४५, ७३, ९६	खरोट्टी	२८	गलती	७८
क्याटलडी	९०	खरोष्टी	२८, ३७	गवर्नमेन्ट	९५, १०४
क्याडिलिअन	५०	खर्व	५, ५५, ५६	गवॉरों	६४
क्यार्डन	२१	खलीन	१९	गाय	७५
क्याल्लेट	१३८	खलीफा	४३, ४४, ४५	गार्डिनर	१३८
क्रम	५९	खलीफा अल-		गावी	२०
क्रमक्रिया	६१, ६३	मनून	१०७	गाहियों	६६
क्रमरीति	६०, ६२	खाली	४०	गाही	६६
क्रमिकसमुदाय	१४०	खूबसूरती	११९	गिनती	३, ५९
क्रिप्टिओ	९५	खोपड़ी	२८	गिरार्ड	१०२
क्रिया	६४, ७७, ७८, ९१, ९३	गणक	६१, ६२, ८७, १५०	गुणक	६७, ६९, ७०, ७१, ७२, ७३, ७४, ७६
क्रिस्चिअन वोलफ	१०१	गणकों	७५	गुणन	६७, ६९, ७०, ७१, ७२, ७३, ७४, ७६
क्रोटन	१२२	गणना	६	गुणनक्रिया	७६
क्रिलिअन	५०	गणित	१२, २१, ४१	गुणनफल	७०, ७२, ७३, ७४, ७६
कल्यास वूट	१३७	गणितकौमुदी	१०४, १२०, १२९		
क्षत्रिय	१७	गणितनिदान	९५		
क्षेत्र	८१	गणितपाव	३७, ४८		
क्षेत्रफल	७०, ८५, १०६	गणितप्रकाश	९५		
क्षेत्रव्यवहार	८६, १३०	गणितविद्या	४४		
सकक्षायोजन	५१	गणितस्कूल	१२३		
खड़ी	११, ७				

गुणनयंत्र	७१	गोलपृष्ठफल	१०३	घन अघन	८६
गुणनरीति	७३,	गोला	१६	घनक्रिया	८२
गुणने	७७, ७९	गोलाध्याय	४१, ५१, १०३	घनक्षेत्र	८२
गुणा	६७, ७४	गोली	५३, ५४, ५८	घनचितिघन	११६
गुणोत्तरश्रेढी	१३, ९४, १०६	गोविन्दाचारी	७४	घनमूल	८०, ८४, ८५
गुंर	१३७	गौ	२०	घनविधि	८५
गुण्य	६७, ६९, ७०, ७१, ७२, ७३, ७४, ७६	गौणी	२०	घमंड नशा	२१
गुण्यगुणकरूप	८३	गौतमबुद्ध	४०	घातसंख्या	९६
गुवारअंक	४५	गौरीशङ्कर	३९	घास	५२, ५४, ६१
गुवारगणित	६७	ग्रह	१२	घोड़ा	५८
गुरु	२९, ३०, ३१, ५९	ग्रहगणित	४१, ५१	घोड़े	५८
गुरुपरंपरा	८६	ग्रीक	९, १२, १७, १९, २१, २६, २७, ४४, ६५, ९५, ९८, १२३	चकेट	५१
गेलिड्यांड	१३७	ग्रीक अक्षर	२५	चटशाला	३१
गोटिओ	६४, ६५, ६६, ७६	ग्रीक का भिन्न	८८	चतुर	८
गोटी	५८	ग्रीस	१७, १८, ४४, ६५, ८५, ९४, १०७,	चतुर्वदाचार्य	११८
गोता	२०	घटना	६२	चंद्रमा	१४
गोपोनलिका	२०	घटा	७७	चंद्रविम्ब	१३
गोमतीचक्र	५५	घटाना	५९, ६२, ७९	चलनकलन	१३४
गोमूत्रिका	७४, ७५	घटाने	५९, ६४, ७७, ७९	चलराशिकलन	१३४
गोमूत्रिकागुणन	७४	घटी	१२	चौड़ी	११८, ११९
गोमूत्रिकाबन्ध	७६	घड़ी	४६	चार्ल्स मार्टल	४३
गोमूत्रिका रीति	७५	घन	८०, ८०, ८४	चालीस	६८
गोल	६			चिति	११५
				चितिघन	११५, ११६
				चिता	१०
				चिह्न	१४, २९, ९७, १०२
				चीन	२२, २७

चूने	६५	जाता	६२	७१, ७४, ७६, ८३,
चौकाघाट	१०	जानपेल	१००	८७, ८९, ९४
चौभड़े	६५	जानवर	१६, ५६	टन ५०
व्यासलर सेटोन	७०	जानवरो	५६	टाटागलिआ ८८, १०१
छंदःशास्त्र	१२९	जानवालिस	१०२	टारेटम १२२
छंदोग्रन्थ	४८	जानस्पिडेल	१३९	टालमी १२
छाल	१४, ९१	जानहेनरिकरान	१००	टीका ७८
छेद	७७	जीनट्रेन्चनट	५१	टुकड़े ५८
छोटा	५५	जीवा	९५, ९७	ट्रेदी ६, ७५
छोटे दर्जे	१४०	जुआ	५४	टीक ७८
छोटे स्थान	५९	जुआरी	५४	ड डेकर १३७
जगन्नाथपण्डित १०४,		जूष्टर्गी	९७	डाइओफांटस टी. ९४
१०६		जेराकोल्वर्न	१०९	९८
जगह	७१	जैमिनि	१९	डा कर्न ४८
जंगली	४३	जैमिनियायमाला १८		हि कारेंस १०१
जड़ ५५, ५७, ६१, ८५		जैमिनियायमाला-		डि मार्गन ९६, ९९
जमोन ६, ३८, ४१, ४५,		विस्तर	३९	डिरिक्लेट् १११
५८, ६०, ७१		जैमिनिसूत्र	३७	डेढ़ा ६८, ६९
जयपुर १०४		जोड़ ३८, ५९, ७७		डोरियन १२२
जयराम ज्यौतिषी ६		जोड़ना ५९		डोरी १०
जरब कोठरी ६९		जोड़ने ७९		डोढ़े ६८
जर्मन ११, २७, ४६		जोड़ी का तत्त्व १४०		डेढ़ा ६८, ६९
जर्मनी ६५, ७६, ९८		ज्यौतिषवेदाङ्ग ८९,		डोरिअन १२२
जर्मन १००		९०, १३०		डोरी १०
जलधि ५७		ज्यौतिषिओ ७९		ड्योढ़े ६८
जलमानुस १६		ज्यौतिषी १०, ११, ३५,		तत्त्व १४०
जातक ६		४१, ६१, ६३, ६४,		तत्त्वविवेक ८६, ८८

तत्त्व	७३	त्रिभुजाकारसंख्या	दशमलवविन्दु ९७
तबित	१०८	११६	दशलाख १२, १६
तबितविनकोर्रा १०७		त्रिरात्र २	दह ५०
तमोली ६५		त्रिशतिका ७३, ८३,	दहाई ३, ५२, ६०, ६१
तलवार ४३		८५, ८६, १०४	दहिनी ६५
तसवीर ११९		त्रैराशिक १२४	दाति २०
तहसीली ६९		व्यणुक १३०, १३१	दात्र २०
तंत्रविद्या १२१		थाली १४	दिन १२
तंत्रशास्त्र १२१		थेओडोरास ८६	दिल्ली ९९
तंत्रशास्त्रो ११९		थेनो १२३	दिवाली ११८
ताड़ ९, १०		थेलस १२२	दीक्षित ५६
ताड़न ७१		थेवेस १२२	दीनदयाल बाबा २५
तांत्रिक ११८		थेशियनस ४	दीनार १९
तारिफट १०		दक्षिण २४, ५४	दीर्घ ४८
तिथि १३, १४		दमयन्ती ९	दीर्घवृत्तलक्षण १३२
तिरछी ६, ७, ११		दरपन ३८	दुनाई ६७
तिरछी रेखा ६१, १००		दरभङ्गा ३०	दुर्गा ४८
तीन चार रंग ५४		दरयाई ५८	दुर्गाशङ्करपाठक ५
तुरकों १२३		दलाल २७	दूब ५३
तुलसोदास ६२, ६७,		दश ५२, ५७	दढ़ १०४
८१		दशगुने ६८	दढ़भाज्यहार १०३
तुलसीपति ६२		दशपूर ५२	दढ़संख्या १०३, ११४
तैरियन् १२२		दशमलव ७१, ९४,	दढ़संख्याओ १०५
तोप १४९		९६, ९७	देव १९
त्रि ८		दशमलव गणित ९५,	देवकृष्णमिश्र १०३
त्रिकोणमिति ९५, ९६		९६	देवता १३
त्रिभुज ८५		दशमलव दीपिका ९५,	देवनागरी ९, ३२

दो रंग	५४	नागरमोथे	६१	९,४९
छादशास्त्र	८२	नागेश	४९	न्याय २,१०
छि	८	नाटक	२	न्यूजी ल्यांडर ३६
छीष्टकर्म	१२६	नाद	१	न्यूटन १०२,१३८
छाणुक	१३०	नानिलिअन	५१	न्यूयार्क १३८
धन	५२,९८	नापाक	२८	न्यूरेम्बर्ग ९८
धनपति	५२	नामो	५७	पक्षिणी २
धरसेन	३८	नारायण (पण्डित)		पचकोना १२१
धर्म	१७	७९,८५,१०४,		पच्छह ६८
धर्मशास्त्र	२,१७	११८,१२०,१२९		पंच ८
धातुओं	५६	नारायणभट्ट	१२९	पंजाब १८,२८
धारा	७५	निकोमाकस्	८४	पंजों ५२
धूर २१,४१,४२,४५,		निखर्व	५५,५६	पटने ३०,३८,११६
६०,६५,७१		निघ्न	७१	पटरा ३८,४२
धूर पर के अङ्क	४५	नियुत	५,५४,५६	पटरिओं ४२
धौं चा	६८,६९	निरुक्त	२	पटरे ६०,६५,७१
नई कल्पना	१३०	निश्छेद	१०४	पंडित १०,२१,३०,४१
नई संख्या	१३१	निष्पत्ति	१०१	पतञ्जलि ३१
नए	६१	नील	५,५०,५८	पत्ता १०
नगियइआ	१२१	नीला रंग	१४५	पत्तरी ११९
नव	८,९	नील कमल	५८	पत्थर ५८,६४
नवकोठे	११९	नीलम	५८	पदार्थ ५७
नवगोटिआ	१२१	नेपिअर ७०,९५,१३२,		पद्म ५,४९,५५,५६
नवग्रह	५५	१३४,१३५,१३६		पद्मनाभ १०४
नवदश	३४	नेशनल लाइब्रेरी १२०		पद्मा १०,११,५८
नवनिधि	५,४९,५२	नैयायिकों १२०,१३०		परब्रह्म २७
नागरमोथा	५२	नैपथ (नैषधचरित)		परमेश्वर ८२,१०३

परबलय	१०६	१=४	पृथूदक	११८
परार्थ	४९,५०,५७	पाणिनि २,६,७,८,९	पृथूदकस्वामी	११७
परिच्छिन्न	१४१,१४५	२०,३५,४०	पेड़	१४,९१
परिच्छिन्न क्रमिक-		पातंजल महाभाष्य २०	पेनसिल	४२
समुदाय १४१,		पांती ३२	पेल	१०१
१४५		पादोन ६९	पैथागोरास् ८३,८६,	
परिच्छिन्न समुदाय		पान ६५	१०५,१०७,१०८,	
१४१		पानी १६,५१,५७	११६,१२१,१२२,	
परिधि	५,१४,९०	पानी का मोथा ५२	१२३	
परिभाषा	६७	पाली ३२	पोखराज	५८
परिवा	१४	पासिओली ५०,१०१	पोथी ४५,६७,९१,	
पर्खर्ट	१३८	पिक १८,१९	९२,९३,९८	
पर्वत	६८	पिकाक साहब १६,	पोप	७८
पर्दाया (पर्सिया) ११,		७१,९५	पौं चा	६८,६९
१९,४३		पिंगल १२९	पौना	६८,६९
पर्सियन	१९	पिंगल ग्रन्थ २४	पौनेचार	६८
पल	१२	पिटिस्कस ९६	पौराणिक	५
पल्ला	७२	पिपर १९	प्यारिस	१२०
पल्ले	७१,७२	पीठ ९९	प्यासकल	११७
पश्चिमोत्तरदेश	१८	पीटर बड़े २६	प्रकरण	६७
पहाड़ा	६७	पुराण २,१०	प्रघातमापक	१३२
पहाड़े	६७,६९	पुरोहित ९१	प्रचलितरोति	७५
पहाड़े में	८१	पुलिश ३७,५१	प्रतिविम्ब	३८
पहार	६७,८१,१२९	पुस्तकालय १०३	प्रत्युत्पन्न	७३
पाटी	१०४	पूजा ३१,५८	प्रभाकर	१०२
पाटीत्रिभुज	११७	पूर्णमा १३,१४	प्रयुत	५३
पाटीसार	८३,८५,	पूर्वमीमांसा २	प्राकृत ६,२९,३१,३५,	

५०, ६९	वध	७१	बाँस के टुकड़े	६१
प्राब्लेमाटा ४	बनारस १०, २७, ३०,		विगड़	६९
प्रेत ११९	३८		बिंदु	१
प्रेग १३५	बनारस संस्कृत का-		बिचिकी	२५
प्लेग ११९	लेज १०३		विलिअन	५०
प्लेटो १०५	बनिये ६५		बीप ५६, ५७	
फरम्याट १०९, ११०,	बनियों १००		बीज ६, ५५, ५६, ६९,	
११३, ११४	बनियों का गणित	९३, १००		
फरासीस ६५	६५		बीजगणित ६९, ९१,	
फलक ४१, ४२	वधिक १९	९६, ९७, ९८,		
फलित २१	ववेरु १९	१००, १०३		
फलितज्योतिष २१	ववेरु जातक १९		बीजगणित भाग ९८	
फाटक १२२	वरना १०		बीसा ११९	
फारसी १८	बर्गी १३५		बुद्धघोष ६, १९	
फाहसा पासिडिओ	बर्लिन ११४, १२०		बुद्धि-विलासिनी ६९	
१२७	बलराम ३८		बृहत्संहिता १२, ३७	
फिघर ४४, ४५	बहुपट्ट ११३		बेमेल ५४	
फोनिसियंस १९	बाइविल १९		बोधायन ८९, ९४,	
फ्रेंच २७	वाई ६५	१५०, १५१, १५२,		
वगदाद ४३, ४४, ४५	वापूदेवशास्त्री ४२,	१५३, १५४		
बंगाल ९, १०	९७, १२६, १३२		बौद्ध ६ ३१, ८१	
वजरबट्ट १०	वारह-अकूखरी २९		बौद्धग्रन्थ ५०	
बटेश्वर ४९	वारहकोने ८२		बौद्धा ४२, ५८, ८६	
बड़ा ग्यारहा ६८	वारहगुने ६८	११६, ११९		
बड़ा पौना ६९	वाराखड़ी २९, ३०		व्याकेट ड मेज़ियाक्	
बड़े दर्जे १४०	बालू ४२, ६५	११०		
बड़े स्थान ५०	बाँस ५३, ५८		व्याविलोनिया ११,	

१२, १३, १४	वारी १०२	१०३, १२४, १२९
ब्रह्मस् १३९	बिन्दु ९६, ९७	भिक्षा ८७
ब्रह्मगुप्त ३७, ४४, ४५,	बंघे संस्कृत सीरिज १०४	भिक्षा अङ्क ८७
४९, ५१, ७३, ७७,		भिक्षा ८८
८२, ८३, ८४, ८५,	भइआचारा ७६	भुज ६९, ८१
८७, ८८, १०४, ११७,	भगवान ५८	भुजकांठि ७०
११८, १२४	भजन ८०	भूगोल ३२
ब्रह्मलिपि २८, ३१	भट्ट बलभट्ट ३७, ४९,	भूमि ८५
ब्रह्मा २९, ५१, १३०	१०४, १२४	भोजपत्र ११८
ब्रह्माक्षर २९, ३१, ३२,	भट्टोजिदीक्षित १३०	मकर ५
३३	भट्टोत्पल ३७	मक्के ४३
ब्रह्माक्षरों ४६	भट्ट ११८	मजहब ४३
ब्रह्माण्डपुराण ४९	भाग ६७, ७९	मजहबी ४३
ब्रह्मायु ५१, ५२	भागहार १७, ७७, ७८	मणित्थ १९
ब्रह्मायु-दिन ५१	भाजक ६७, ७७, ७८	मणिभट्ट १२०
ब्राह्मण १७, २८	भाज्य ६७, ७७	मत्ता २९
ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त ६,	भानुदीक्षित ६, ५३,	मदीना ४३
७३, ८२, १०४,	५४	मद्रास ९
११७, ११८	भारवि ७५	मधु ५४, ५५
ब्राह्मी २८, २९, ३१, ३७	भास्कर ६७, ६९, ७३,	मध्य ५१, ५७
ब्राह्मोलिपि २८, २९, ३१	७५, ७८, ८२, ८३,	मनियाँ १०
ब्रिगज ९६, १३७, १३८	८६, ८७, ८८, ८९,	मनु २०
ब्रिज १९	९७, १०४	मनुस्मृति ३७
ब्रिटिस अजायब ९१	भास्करलीलावती ११९	मनोरञ्जनी ७८
ब्रेमिकर १३८		मय १२, १९
वगदाद १०७	भास्कराचार्य ६, ३९,	मयदैत्य १२
बलभी ३७	४१, ४९, ५९, ८१, ८६,	मरीचि ३९

मर्दुमशुमारी	९९	माली	५६	मेम्फिस	१२२
महत्तमापवर्त्तन	८८,	मासकील	५५	मेमोर्स	११४
१०३, १०४		मिटाकर	६०	मेरु	१२९
महम्मद	४३	मिथिला	६७, ६९	मेसोपोटमिया	४३,
महम्मदविन इबरा-		मिरिफिसि लोगारि-		१०७	
हिम अलफ-		थमोरम क्यानोनिस		मैसूर के हसन	१२२
ज़ारी	४५	डेसक्रिप्टिओ	९५	मोटी	१२१
महर्षि	२९	मिलिअन्	५०, ५१	मोरैला	१९
महल	७४	मिलिअर	५१	मोसकोपलस	१२०
महादेव	२, ४०	मिलिंद	१९	मोहनलालपंडित	९५
महानिशा	११८	मिलो	१२३	मोहरे	५८
महानुभाव	८७	मिश्रधन	१२४, १२५	मौर्यवंश	२८
महापद्म	५, ४९, ५५, ५६	मिश्रित संख्या	१३२	मौलवी	२८
महाप्रश्नाध्याय	८८	मीमांसा	१०	म्याक्ज़िमा और	
महाभारत	२, ३०	मुकुन्द	५	मिनिमा	९९
महाभारत स्त्रीपर्व	३६	मुनीश्वर	३९	म्लेच्छ	१२, १९
महाभाष्य १०, ११, ३१		मुंदरी	६	यजुर्वेदसंहिता	४६
महामारी	११९	मुसल्मान	२८, ४३, ६९	यंत्र	४१, ११८
महाश्मशान	४०	मुँहजवानी	६८	यंत्र-मंत्र	२१
महासागर	५७	मुँगा	५५	यंत्राधिकार	४१
महासिद्धान्त ७९, ८०,		मूत्र	७५	यमल	१०७
८१, ११७		मूल	८५	यवन	९, १२, १९
महीधर	४६	मूलधन	१२५	यवनानी	९
मात्ता	२९	मूलपुरुष	११०	याजुष	८९, ९०
माधवाचार्य	१८, ३९	मूसा बिन सकीर	१०७	याजुषज्यौतिष	३६
मारकर	६०	मेंडक	१६	याम्लिकस	८०
मारने	७१	मेदिनीकोश	५५	युक्ति	५९

युक्तेद ८५, १०२, १०६,	रामकृष्ण	४१	१३२
१०८	रामसेस	१४	लंका १२, ५२, ५५
युग	२, १०७	रायलसोसाइटी	९०
युग्म	१०७	रावण	२९
युत	५६	रावर्ट रेकार्ड	१००
यूफाटस	४४	राह	९२
यूरप	२१, २४, २८,	रिंड	९१
४३, ५०, ५१, ६५,		रीति	६९
६८, ७०, ७१, ९९		रुद्र	१३
यूरपवालों	४४	रुद्रि	३५
यूलर १०९, ११०, १११,		रूप	६
११२, ११४, १२०		रेकार्ड	१०२
योगश्रेढी	९४	रेखा	६, ७, ११, ७५
रडोल्फ	९६	रेखागणित	७३, ८४,
रंग	५४	८५, ९१, १०३, १०४,	
रत्न	५८	१०५, १०६, १०८	
रत्नकोश	४८	रेगिओमान्टनस	९५
रत्नाकर	५७	रेग्युला दौरम् फा-	
रस	५४	ल्सोरम	१२७
रसिअन	२५	रेग्युला फालसा	१२७
रंहति	२०	रोमन	२२, ४६, ६८
राजकुअर	४४	लर्कोडिओ	७०
राजाशिवप्रसाद	३२	लकीर	६७
राधाकृष्ण	३९	लक्ष	५३, ५४, १२४
राबडोलोगिआ	७०,	लक्षा	५३
७१		लघुतमापवर्त्य	८८
राम	३९, ८१	लघुरिक्थ	७०, ७१,

लेखा	६	वामगति	३७	वृत्त	१४
लेखनिज्ञ	१०१	वालमीकि	४८	वृत्तरत्नाकर	१२९
लोई	११	वालमीकिरामायण २,		वृन्द	४८
लोप	४४	३०, ३६, ४७		वेगा	१३८
लोह	९	वालेस	९०, १०२	वेद	६, १७, ३५, ८६
ल्यागूर्ज	१११	वास्तवविचित्रप्रश्न		वेदत्रयी	१
ल्याटिन	२७, ४०	१०६		वेददीप	४६
ल्युकस ड वर्गों	७७, ७९, ८१	विकट पहाड़े	६८	वेदान्त	२, १०
बराह	८०	विडुम्यान्	९८	वेदान्ती	१०
बराहमिहिर	१२, १४, ३७	विततभिन्न	९०	वैज्ञानिक	१५०
वर्ग	१२, ८०, ८२	विद्या	५९	वैद्या	१००, १०२
वर्ग-अवर्गस्थान	८६	विद्या इतिहास	४४	वैदिकपरिभाषा	१५०
वर्गकोठे	७०	विद्यार्थी	९७	वैदिकप्रकरण	९४
वर्गक्रिया	८२	विद्यापीठ	३८	वैदिकरेखागणित	१५४
वर्गचक्र	१२०	विधि	१०६	वैद्यक	५९
वर्गचिह्नघन	११६	विपल	१२	वैद्यशास्त्र	३
वर्गप्रकृति	४४	वियोजक	६२, ६४, ६६	वैयाकरण	२७
वर्गमूल	८०, ८४, ८५	वियोग	६३	वैशेषिक	२
वर्गरीति	८५	वियोज्य	६२, ६४, ६६	वैष्णवदास	१०
वर्णमाला	२४, २५, ३२, ४२, ८०, १००	विलियम ओट्टेड	१००	वैष्णवगणित	१०३
वस्तु	१३	विलोमक्रिया	१२४	व्यंजन	२९
वस्तुदेव	४१	विलोमगणित	१२३	व्यवकलन	६३
वशीधर पण्डित	९५	विश्वनाथनगरी	४०	व्यवकलित	६३
वार्ड साहब	१३६	विषम	८४	व्यस्तविधि	१२४
		विषमसंख्याओं	८४	व्याकरण	६, १०, ३१, ३५, ४०
		विशुद्धमोत्तरपु- राण	५१		

व्याघ्रमुख	४४	शुक्र	१३, १४	समच्छेद	८८
व्याज	१२५	शुक्लपक्ष	१४	समा ड अथमे-	
व्यापार	५२	शुक्र	६४	टिका	७७
व्यास	१४, ३०, ४०	शुक्लसूत्र	८९, ९४, १५२	समाधि	११६
व्यासार्ध	९३	शुक्लसूत्रों	८८, १०४	समानान्तर	९०
शकल	७३	शून्य	१६, २७, ३८, ४०, ६०, ६२, ८७	समुदाय	१४०
शक्ति	४४	शेष	६७	समुद्र	५४, ५५, ५७, ५८
शंकु	४९, ५०, ५६	शेषांक	६२	समोस	११२
शंकुच्छिन्न	४४	श्वास	११८	सरस्वती	१७
शंख	५, ४९, ५८	षट्	८	संवर्ग	८२
शत	५३, ५७	षड्विंश ब्राह्मण	१३	सवैया	६८, ६९
शतपर्वी	५३	संकलन	५९	संस्कृत	१२, १९, २०, २८, ३०, ३३, ३४, ३५, ५०, ५१, ५३, ५९, ६७, ६९, ७५
शतरंज	५७	संकलित	५९	संस्कृतहिन्दी	१८
शब्द	१, १४	संख्या	१२	सहस्र	५३, ५५
शरीर	१७	संख्याओं के संस्कृत		सहस्रवीर्या	५३
शलाका	१५४	शब्द	१५४	सांख्य	२
शव	२०	संगीत	५९	सागर	५७
शक्ति	२०	सजातीय	१४४, १४६	साधनसुबोध	७४
शस्त्र	५९	सतसई	६७	साधारण	१४०
शस्त्रविद्या	३	सतसैया	८१	साधारणसंख्या	१४५
शहर	५४, ५५	सप्त	८	साधु	१०
शहाबकः	६९	सप्तशती	४८	सान्दीपनि	३८, ४१
शाकटायन	७	सफेद	४२	सावित्रन	२१, २२, ४३
शाका	३८	संभवसंख्या	१३२	सारणी	१२, १३, १४,
शारदातिलक	३८	सपाद	६९		
शिलादित्य	३८	सभापति	९०		
शिष्य	१०३				

४४,४५,९१,९३,	३७,४१	स्वभागापवाह	१२५
९६,९७,९८	सेठ	४२	स्वर २९,८९
सिकंदर ११,१८,१९	सेतखड़ी	४१	स्वरित ७
सिकसलिअन ५१	सेण्टलिअन	५१	स्वांशानुबन्ध १२५
सिक्का ६	सेमिटिक	२८	स्वांशापवाह १२५
सिद्धशब्द ३१	सैकड़ा	५३	हजार ५३
सिद्धान्तकौमुदी	सोमाकर	८९	हजारस्थान ६०
५६,१३०	सोमाकरभाष्य	३६	हर्टन १०७
सिन्दहिन्द ४५	सोरहवी	१३	इडो १६,५५,५७,५८
सिफ्र ४०	सौर	१३	हनन ७१
सिफ्रा ४०	सौरदिन	५१	हर ८७,८८
सिरिआक् २५	स्कारल्यांड	१३६	हंस १४,१६
सिरेन ८६	स्कान	१३८	हंसों ५७
सिरोस १२२	स्कूल४२,६९,७८,८७		हाइजिस्कूलेस १२
सिल्वेस्टर ७८	स्कूलों ६१,७४,७५		हाथ ६१,६५
सिसिली १२२	स्केल १५४		हाथ आप ६१
सीता ३९	स्टिफेल ९८,९९,१३३		हाथ आप एक ६०
सीताराम ३९	स्टेविन ९६,९७,१३३		हाथ नहि ६२
सीपी ५५	स्थान १२,४१,५७,५९		हाथ लगे ६१
सीमाइट ४३	स्थानांक ६३,६६,		हाथों १००
सोरिआ ४३	७०,७९		हाब्सन १५०
सुराष्ट्र २०	स्पर्शरेखा १३७		हार ७७
सुलेमान १९	स्पष्टाधिकार ८६		हारिओट (ह्यारि-
सुश्रुत १२८	स्पेन ४३		ओट) १००,
सूची ११५,११६	स्मृति २		१०१,१३३
सूर्य ५,१२	स्यांग १३८		हालैंड १३७
सूर्यसिद्धान्त १२,	स्याही ११८		हिंद १९

हिंदसिंद	४५	८७,९५,१०३	हेनरी ब्रिज	१३६	
हिंदी २४,२५,३१,५०,		हिंदू १६,१८,१९,२६,	हेमचन्द्र	८,८४	
५२,५८,५९		२८,३१,३८,४४	हौ	९३	
हिंदी पिंगल	२५	हिंदू उपपत्ति	८४	ह्यालिफाक्स	१३६
हिंदी बीजगणित १२६		हिंदूलोग	६९	हुगेनेस	११४
हिंदीसा	४१	हिब्रू	२५	ह्विटकर	१३२
हिंदुओं २७,४५,४६,		हिस्सा	५७	श्रीधर ४९,७३,८३,	
५७,५८,६५,६८,		हिसाब	१०,७१	८४,८५,८६,८७,	
९५		हिसाबेहिंद	४१	११७,१२४	
हिंदुस्तान ६,९,१३,		हीप	९३	श्रीपति ४९,१०४,	
१८,२०,२१,२७,		हीरा	५८	१२४	
२८,३८,४१,४२,		हीरादत्त	६५	श्रीयन्त्र	१२१
४३,४४,४५,६८,		हूठा	६८,६९	श्रीहर्ष	९,२९,४९

Printed by B. Ram Narayan at the Prabhakari
Printing Works Benares.

